A parciális integrálás
(Metóda integrovania per partes)

Ennek az eljárásnak az alapját a függvények szorzatának a deriválása adja.

$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

mindkét oldalt integrálva kapjuk

$\int (f.g)'(x)\,dx = \int f'(x).g(x) + f(x).g'(x)\,dx$

függvények összegének az integrálja a függvények integráljainak az összege – a jobboldalt két integrálként írhatjuk

$\int (f.g)'(x)\,dx = \int f'(x).g(x)\,dx + \int f(x).g'(x)\,dx$

függvények szorzata deriváltjának az integrálja (a baloldalé) pontosan ezen függvények szorzata

$(f.g)(x) = \int f'(x).g(x)\,dx + \int f(x).g'(x)\,dx \qquad /- \int f(x).g'(x)\,dx$

az egyik határozatlan integrál átvitelével a másik oldalra átalakul

$f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx = \int f'(x).g(x)\,dx$

már csak az oldalakat kell felcserélni, és megkapjuk az alábbi tételt:

T. $\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$

M. Ez a tétel függvények szorzatának integrálására szolgál. De nem használható bármely esetben. Ezen tétel szerint két függvény szorzatának integrálját, melyekből az egyik egy deriváltfüggvény [az egyik tényező egy függvény deriváltjaként keletkezett: $f(x) \to f'(x)$], meghatározhatjuk különbségként.
Ezen függvényeknek bizonyos feltételeket kell teljesíteniük:

- a deriváltfüggvényt kell tudnunk integrálni (ismerni az ő határozatlan integrálját – azt a függvényt, melyből deriválással keletkezett
- a jobboldalon az integrálban szereplő szorzatnak [$f(x).g'(x)$] integrálhatónak kell lennie – vagy legalább egyszerűbbnek

M. A függvények kiválasztására sincs egy általános szabály, aminek segítségével egyértelműen meghatározhatnánk a szorzatból, hogy melyik függvény a derivált [$f'(x)$] és melyik a nem [$g(x)$]. Ha a feladatban feltüntették, hogy éppen parciális integrálással kell megoldanunk, ebből tudhatjuk, hogy a szorzat egyik tényezője deriváltfüggvény – vagyis csak két lehetőségünk van.

példa:

Számítsuk ki parciális integrálással: $\int x.e^x\,dx$

válasszuk ki a függvényeket: legyen a szorzatból a deriváltfüggvény az: $f'(x) = x$
akkor a nem derivált lesz a: $g(x) = e^x$

meghatározzuk az $f(x)$-et és a $g'(x)$-et

$f'(x) = x \quad \to \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$g(x) = e^x \quad \to \quad g'(x) = e^x$

M. Ebben az esetben nem szoktuk az integrál után írni a „+ c“-t

vagyis az új tétel szerint írhatjuk:

$\int x.e^x\,dx = \frac{x^2}{2}.e^x - \int \frac{x^2}{2}.e^x\,dx$

vagyis az $\int x.e^x\,dx$ integrál helyett így az $\int \frac{x^2}{2}.e^x\,dx$ integrált kellene megoldanunk

A kapott integrált ugyanúgy nem tudjuk kiszámítani. Ráadásul, ha egy laikus összehasonlítja a két integrált, számára is egyértelmű, hogy a kapott második integrál meghatározása egy bonyolultabb feladat az eredeti integrálhoz képest. Valószínűleg rosszul választottuk meg a függvényeket. Próbáljuk meg fordítva!

$f'(x) = e^x \quad \to \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x$

$g(x) = x \quad \to \quad g'(x) = (x)' = 1$

újra behelyettesítünk a tételbe:

$\int x.e^x\,dx = e^x.x - \int 1.e^x\,dx =$

ezt az integrált könnyedén megoldjuk (egy elemi függvény határozatlan integrálja)

$= x.e^x - e^x + c$

Számítsuk ki parciális integrálással: $\int x^2.e^x\,dx$

válasszuk ki a függvényeket:

$f'(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x$

$g(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad g'(x) = (x^2)' = 2x$

$\int x^2.e^x\,dx = e^x.x^2 - \int 2x.e^x\,dx = x^2.e^x - 2.\int x.e^x\,dx =$

most alkalmazzuk az előző feladat eredményét

$= x^2.e^x - 2.[x.e^x - e^x] + c = x^2.e^x - 2x.e^x + 2e^x + c$

Még tartozom az elemi függvényekből a logaritmusfüggvény határozatlan integráljával – ln x és a $\log_a x$. Eddig nem rendelkeztünk olyan módszerrel, amivel ezt az integrált kiszámíthattuk volna. Próbáljuk meg parciális integrálással!

Számítsuk ki parciális integrálással: $\int \ln x\,dx$

válasszuk ki a függvényeket: …

de hát itt csak egy függvényünk van – hiányzik a szorzat másik tényezője

de hozzáírhatunk egy 1-es számot, mint tényezőt – ezzel nem változik sem a függvény, sem a feladat

$\int \ln x\,dx = \int 1.\ln x\,dx =$

$f'(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \ln x\,dx = ???$

így ugyanaz a probléma jelentkezik: nem ismerjük az ln x határozatlan integrálját

válasszuk ki fordítva

$f'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 1\,dx = x$

$g(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

újból behelyettesítünk

$\int \ln x\,dx = \int 1.\ln x\,dx = x.\ln x - \int x.\frac{1}{x}\,dx = x.\ln x - \int 1\,dx = x.\ln x - x + c$

Számítsuk ki: $\int \log_a x\,dx$

$$\int \log_a x\,dx = \int \frac{\ln x}{\ln a}\,dx = \frac{1}{\ln a}\int \ln x\,dx = \frac{1}{\ln a}(x.\ln x - x) + c = x.\frac{\ln x}{\ln a} - \frac{x}{\ln a} + c = x.\log_a x - \frac{x}{\ln a} + c$$

Számítsuk ki parciális integrálással: $\int x.\cos x\,dx$

válasszuk ki a függvényeket:

$f'(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x$

$g(x) = x \quad \rightarrow \quad g'(x) = (x)' = 1$

$\int x.\cos x\,dx = \sin x.x - \int \sin x.1\,dx = x.\sin x - (-\cos x) + c = x.\sin x + \cos x + c$

Számítsuk ki parciális integrálással: $\int e^x.\sin x\,dx$

$f'(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f(x) = \int f'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x$

$g(x) = \sin x \quad \rightarrow \quad g'(x) = (\sin x)' = \cos x$

$\int e^x.\sin x\,dx = e^x.\sin x - \int e^x.\cos x\,dx$

erre az integrálra még egyszer alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét

$h'(x) = e^x \quad \rightarrow \quad h(x) = \int h'(x)\,dx = \int e^x\,dx = e^x$

$i(x) = \cos x \quad \rightarrow \quad i'(x) = (\cos x)' = -\sin x$

$\int e^x.\cos x\,dx = e^x.\cos x - \int e^x.(-\sin x)\,dx = e^x.\cos x + \int e^x.\sin x\,dx$

behelyettesítjük az eredményt

$\int e^x.\sin x\,dx = e^x.\sin x - [e^x.\cos x + \int e^x.\sin x\,dx] = e^x.\sin x - e^x.\cos x - \int e^x.\sin x\,dx$

rendezzük az alábbi egyenletet – kifejezzük belőle a keresett integrált

$\int e^x.\sin x\,dx = e^x.\sin x - e^x.\cos x - \int e^x.\sin x\,dx \qquad /+\int e^x.\sin x\,dx$

2. $\int e^x . \sin x \, dx = e^x.\sin x - e^x.\cos x$ /:2

$\int e^x . \sin x \, dx = \frac{1}{2}.[e^x.\sin x - e^x.\cos x] + c$

Összefoglalás

$\int 0 \, dx = c$	$\int c \, dx = c.x + d$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$
$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln\|\cos x\| + c$	$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln\|\sin x\| + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \ln x \, dx = x.\ln x - x + c$	$\int \log_a x \, dx = x.\log_a x - \frac{x}{\ln a} + c$
$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + c$	$\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + c$
$\int \operatorname{th} x \, dx = \ln \operatorname{ch} x + c$	$\int \operatorname{cth} x \, dx = \ln \| \operatorname{sh} x \| + c$
$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + c$	$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + c$