A mértani sorozat
(Geometrická postupnosť)

pl.

$\langle a_n \rangle$: 1; 2; 4; 8; 16; 32; …

$\langle b_n \rangle$: 18; 6; 2; $\frac{2}{3}$; $\frac{2}{9}$; …

$\langle c_n \rangle$: 32; -48; 72; -108; 162; …

D. Egy ***sorozatot mértani***nak nevezünk, ha bármely két, egymást követő tagjának hányadosa állandó. Ezt az állandó hányadost ***a mértani sorozat kvóciensé***nek (kvocient geometrickej postupnosti) nevezzük (q).

$$\forall n \in \mathbb{N}: q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad q \in \mathbb{R}$$

M. Természetesen a hányados számításánál mindig a sorozat következő tagját osztjuk az előtte lévővel.

Ha rendezzük az összefüggést – kifejezzük belőle a következő tagot, akkor megkapjuk a tagok rekurzív módon történő meghatározását. Vagyis, ha a sorozat egy tagját megszorozzuk a kvócienssel, a sorozat következő tagját kapjuk.

$$a_{n+1} = a_n.q$$

Ha pedig átviszem a kvócienst a másik oldalra, kapom:

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a sorozat előző tagját úgy kapom meg, ha azt elosztom a kvócienssel.

Térjünk vissza az első alakhoz, és konkretizáljuk:

$$a_2 = a_1.q = a_1.q^1$$
$$a_3 = a_2.q = a_1q.q = a_1.q^2$$
$$a_4 = a_3.q = a_1q^2.q = a_1.q^3$$
$$a_5 = a_4.q = a_1q^3.q = a_1.q^4$$

Ha ezt általánosítjuk, megkapjuk az első képletet:

T. a sorozat általános (n-edik) tagjának kiszámítása az első tag és a kvóciens segítségével

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Vagyis a mértani sorozat bármely tagját kiszámolhatjuk az első tag és a kvóciens ismeretében.

Most fejezzünk ki a sorozat egy másik (r-edik) tagját. Ebből kifejezve az első tagot, azt behelyettesítjük az első képletbe:

$$a_r = a_1.q^{r-1} \rightarrow a_1 = \frac{a_r}{q^{r-1}}$$
$$a_n = \frac{a_r}{q^{r-1}}.q^{n-1} = a_r.\frac{q^{n-1}}{q^{r-1}} = a_r.q^{n-1-(r-1)}$$

T. a sorozat egy tagjának kiszámítása egy másik tag és a kvóciens segítségével

$$a_n = a_r.q^{n-r}$$

Azaz a mértani sorozat bármely tagját kiszámolhatjuk egy másik tag és a kvóciens ismeretében.

Hogy „értsük” ezt a két képletet egyszerre?
Ha a mértani sorozat későbbi tagját (nagyobb indexű/sorszámú) számítjuk egy korábbiból (kisebb indexű), akkor a kvóciens annyiadik hatvánnyal szorozzuk meg, amennyivel később szerepel a sorban a keresett tag. Ha korábbi tagot számolunk egy későbbiből, akkor a kvóciens ezen hatványával osztjuk.

az n-edik részletösszeg – a sorozat első n tagjának összege

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

minden tagot az első tag és a q segítségével fejezünk ki

$$s_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \ldots + a_1.q^{n-1} \qquad /.q$$
$$s_n.q = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \ldots + a_1.q^n \qquad /+ a_1$$
$$s_n.q + a_1 = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \ldots + a_1.q^{n-1} + a_1.q^n$$
$$s_n.q + a_1 = s_n + a_1.q^n \qquad /-s_n - a_1$$

a tagokat az s_n szerint osztályozzuk

$s_n.q - s_n = a_1.q^n - a_1$

mindkét oldalon kiemelünk

$s_n.(q-1) = a_1.(q^n - 1)$ $\quad /:(q-1)$

kifejezzük s_n-t

T. a mértani sorozat első n tagjának összege

$$s_n = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

És végül miért kapta a sorozat éppen azt az elnevezést, hogy mértani? Vegyük a sorozat három, egymás után következő tagját. Fejezzük ki a két szélsőt a középső segítségével:

a_n; a_{n+1}; a_{n+2}

$a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$

$a_{n+2} = a_{n+1}.q$

szorozzuk össze a két egyenletet

$a_n.a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{q}.\ a_{n+1}.q$

a jobboldalon q-val egyszerűsítünk, illetve felcseréljük az oldalakat

$a_{n+1}.\ a_{n+1} = a_n.a_{n+2}$

$a_{n+1}^2 = a_n.a_{n+2}$ $\quad /\sqrt{\ }$

gyököt vonunk

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n.a_{n+2}}$$

T. A mértani sorozat bármely tagja (kivéve az elsőt) a szomszéd tagok mértani közepe.

példa:

Írjuk fel a mértani sorozat első öt tagját, ha:

a, $a_1 = 3$; $q = \frac{1}{4}$ $\qquad$ b, $b_6 = 240$; $b_{10} = 3\,840$

a, ha a tagot a kvócienssel szorozzuk, a sorozat következő tagját kapjuk

$a_2 = a_1.q = 3.\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$a_3 = a_2.q = \frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

$a_4 = a_3.q = \frac{3}{16}.\frac{1}{4} = \frac{3}{64}$

$a_5 = a_4.q = \frac{3}{64}.\frac{1}{4} = \frac{3}{256}$

---

b, kifejezzük a későbbi tagot a korábbi segítségével

$b_{10} = b_6.q^4$

$3\,840 = 240.q^4$ $\quad /:240$

$16 = q^4$ $\quad /\sqrt[4]{\ }$

$2 = |q|$

$q = 2$ $\qquad q' = -2$

$b_1 = \frac{b_6}{q^5} = \frac{240}{2^5} = \frac{15}{2} = 7{,}5$

$b_2 = b_1.q = 7{,}5.2 = 15$

$b_3 = 15.2 = 30$

$b_4 = 30.2 = 60$

$b_5 = 60.2 = 120$

Határozzuk meg a mértani sorozat hiányzó elemeit, ha adottak:

$a_1 = 6$; $a_n = 24\,576$; $s_n = 49\,146$ $\qquad$ n, q

$a_n = a_1.q^{n-1}$

$24\,576 = 6.q^{n-1}$ /:6

$4\,096 = q^{n-1}$

$s_n = a_1.\frac{q^n-1}{q-1}$

$49\,146 = 6.\frac{q^n-1}{q-1}$ /:6

$8\,191 = \frac{q^n-1}{q-1}$

az első egyenletből kifejezzük q^n-t megszorozva q-val

$4\,096 = q^{n-1}$ /.q

$4\,096q = q^n$

behelyettesítünk a második egyenletbe

$8\,191 = \frac{4\,096q-1}{q-1}$ /.(q – 1)

eltüntetjük a törtet és felbontjuk a zárójelet

$8\,191.(q-1) = 4\,096q-1$

$8\,191.q - 8\,191 = 4\,096q - 1$ /-4 096q + 8 191

a q szerint osztályozzuk

$8\,191.q - 4\,096q = 8\,191 - 1$

$4\,095q = 8\,190$ /:4 095

$q = 2$

az első rendezett egyenletből kiszámoljuk az n-et

$4\,096 = q^{n-1}$

$4\,096 = 2^{n-1}$ /log

logaritmáljuk az egyenletet

$\log 4\,096 = \log 2^{n-1}$

$\log 4\,096 = (n-1)\log 3$ /:log 2

$\frac{\log 4\,096}{\log 2} = n-1$

$12 = n-1$ /+1

$13 = n$

Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját és kvóciensét, ha érvényes: $a_3 + a_4 - a_2 = 15$
$a_7 + a_8 - a_6 = 240$

minden tagot az első és a kvóciens segítségével fejezünk ki

$a_1.q^2 + a_1.q^3 - a_1.q = 15$

$a_1.q^6 + a_1.q^7 - a_1.q^5 = 240$

az első egyenletben kiemelünk a_1q-t, a másodikban a_1q^3-öt

$a_1.q(q + q^2 - 1) = 15$

$a_1.q^3(q + q^2 - 1) = 240$ $/\frac{II.}{I.}$

elosztjuk a második egyenletet az elsővel – baloldalt a baloldallal, jobbat a jobbal

$\frac{a_1.q^3(q+q^2-1)}{a_1.q(q+q^2-1)} = \frac{240}{15}$

egyszerűsítés után

$q^2 = 16$ $/\sqrt{\ }$

$|q| = 4$

$q = 2$ $q' = -2$

behelyettesítünk az első egyenlet kiemelt alakjába

$a_1.q(q + q^2 - 1) = 15$

$a_1.2(2 + 2^2 - 1) = 15$

$a_1.2(2 + 4 - 1) = 15$ /:2

$$a_1 . 5 = \frac{15}{2} \qquad /:5$$

$$a_1 = \frac{3}{2}$$

$$a_1'.\, q'\left(q + q'^2 - 1\right) = 15$$

$$a_1' . (-2)(-2 + (-2)^2 - 1) = 15 \qquad /:(-2)$$

$$a_1' . (-2 + 4 - 1) = -\frac{15}{2}$$

$$a_1' = -\frac{15}{2}$$