Az egyenes és az ellipszis

(Priamka a elipsa)

egyenletrendszert kell megoldanunk

az egyenes egyenlete (lineáris) + az ellipszis egyenlete (másodfokú)

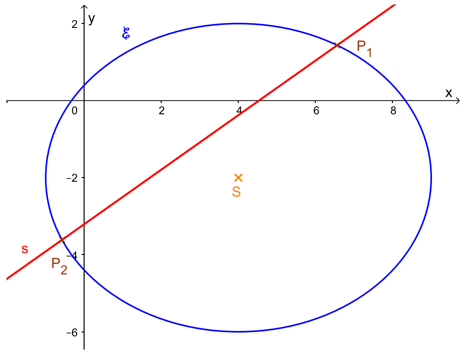
az összevont egyenlet ⟶ másodfokú

az egyenletrendszer megoldásainak száma = az egyenes és az ellipszis közös pontjainak száma

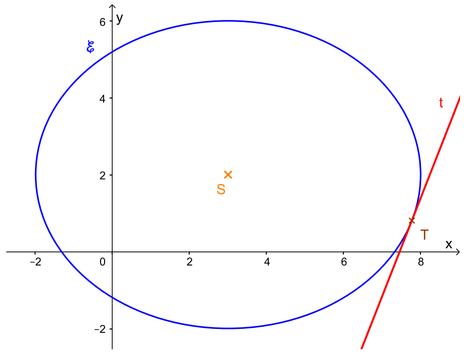
a, két megoldás ⇒ két közös pont ($p \cap \mathscr{E} = \{P_1; P_2\}$) ⇒ szelő (sečnica)

b, egy megoldás ⇒ egy közös pont ($p \cap \mathscr{E} = \{T\}$) ⇒ érintő (dotyčnica)

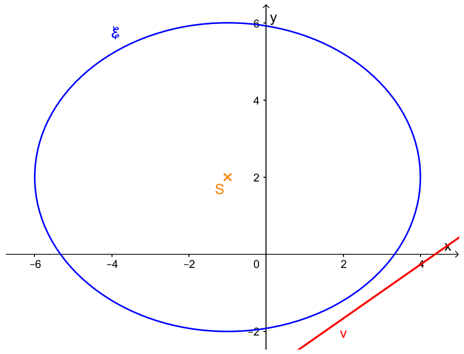
c, nincs megoldása ⇒ nincs közös pont ($p \cap \mathscr{E} = \emptyset$) ⇒ külső egyenes (nesečnica/vonkajšia priamka)



szelő



érintő



külső egyenes

ha adott az ellipszis és az érintési pont:

$\mathscr{E}$: $\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$; $T(x_0; y_0)$ $\qquad$ $\mathcal{E}$: $\frac{(y-v)^2}{a^2} + \frac{(x-u)^2}{b^2} = 1$; $T(x_0; y_0)$

akkor az adott pontbeli érintő egyenlete:

t: $\frac{(x_0-u).(x-u)}{a^2} + \frac{(y_0-v).(y-v)}{b^2} = 1$ $\qquad$ t: $\frac{(y_0-v).(y-v)}{a^2} + \frac{(x_0-u).(x-u)}{b^2} = 1$

példa:

Határozzuk meg az ellipszis és az egyenes közös pontjainak koordinátáit:

a, $\mathscr{E}$: $9x^2 + 25y^2 = 225$
a: $y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}$

b, $\mathscr{E}$: $x^2 + 4y^2 + 2x - 32y - 35 = 0$
b: $2x + 3y + 15 = 0$

c, $\mathscr{E}$: $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{100} = 1$
c: $x = 3 + t$
$y = -5 + 5t$

d, $\mathscr{E}$: $25x^2 + 9y^2 + 100x + 54y - 719 = 0$
d: $20x + 9y - 83 = 0$

a, behelyettesítünk az ellipszis egyenletébe

$$9x^2 + 25\left(\frac{3}{5}x - \frac{3}{5}\right)^2 = 225$$

négyzetre emeljük

$$9x^2 + 25.\left(\frac{9}{25}x^2 - \frac{18}{25}x + \frac{9}{25}\right) = 225$$

$$9x^2 + 9x^2 - 18x + 9 = 225$$

redukáljuk az egyenletet, majd elosztjuk

$$18x^2 - 18x - 216 = 0 \qquad /:18$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x + 3)(x - 4) = 0$$

$x + 3 = 0$ $\qquad$ $x - 4 = 0$

$x_1 = -3$ $\qquad$ $x_2 = 4$

$a = 1$ $\qquad$ $b = -1$ $\qquad$ $c = -12$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-12)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} = \begin{matrix} \nearrow\ 4 \\ \searrow -3 \end{matrix}$$

két megoldás ⇒ az a egyenes szelő

$y_1 = \frac{3}{5}.4 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5} - \frac{3}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8$

$y_2 = \frac{3}{5}.(-3) - \frac{3}{5} = -\frac{9}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{12}{5} = -2{,}4$

$P_1\left(4; \frac{9}{5}\right)$; $P_2\left(-3; -\frac{24}{5}\right)$

---

b, $2x + 3y + 15 = 0$

$2x = -3y - 15$

$x = -\frac{3y+15}{2}$

$\left(-\frac{3y+15}{2}\right)^2 + 4y^2 + 2.\left(-\frac{3y+15}{2}\right) - 32y - 35 = 0$

$\frac{9y^2+90y+225}{4} + 4y^2 - 3y - 15 - 32y - 35 = 0$

$\frac{9y^2+90y+225}{4} + 4y^2 - 35y - 50 = 0$ /.4

$9y^2 + 90y + 225 + 16y^2 - 140y - 200 = 0$

$25y^2 - 50y + 25 = 0$ /:25

$y^2 - 2y + 1 = 0$

$(y-1)^2 = 0$

$y = 1$

egy megoldás ⇒ a b egyenes érintő

$x = -\frac{3.1+15}{2} = -\frac{18}{2} = -9$

T(-9; 1)

---

c, $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{100} = 1$ /.100

$25(x-4)^2 + (y+2)^2 = 100$

$25(3 + t - 4)^2 + (-5 + 5t + 2)^2 = 100$

$25(t-1)^2 + (5t-3)^2 = 100$

$25(t^2 - 2t + 1) + 25t^2 - 30t + 9 = 100$

$25t^2 - 50t + 25 + 25t^2 - 30t + 9 = 100$

$50t^2 - 80t + 34 = 100$ /-100

$50t^2 - 80t - 66 = 0$ /:2

$25t^2 - 40t - 33 = 0$

$a = 25$ $b = -40$ $c = -33$

$t_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-40)\pm\sqrt{(-40)^2-4.25.(-33)}}{2.25} = \frac{40\pm\sqrt{1\,600+3\,300}}{50} = \frac{40\pm70}{50} = \begin{matrix} \nearrow \frac{11}{5} = 2{,}2 \\ \searrow -\frac{3}{5} = -0{,}6 \end{matrix}$

két megoldás ⇒ a c egyenes szelő

$x_1 = 3 + 2{,}2 = 5{,}2 = \frac{26}{5}$

$y_1 = -5 + 5.2{,}2 = -5 + 11 = 6$

$x_2 = 3 - 0{,}6 = 2{,}4 = \frac{12}{5}$

$y_2 = -5 + 5.(-0{,}6) = -5 - 3 = -8$

$P_1\left(\frac{26}{5}; 6\right)$; $P_2\left(\frac{12}{5}; -8\right)$

---

d, $20x + 9y - 83 = 0$

$9y = 83 - 20x$

$y = \frac{83-20x}{9}$

$25x^2 + 9.\left(\frac{83-20x}{9}\right)^2 + 100x + 54.\frac{83-20x}{9} - 719 = 0$

$25x^2 + 9.\frac{6\,889-3\,320x+400x^2}{81} + 100x + 6(83-20x) - 719 = 0$

$25x^2 + \frac{6\,889-3\,320x+400x^2}{9} + 100x + 498 - 120x - 719 = 0$ /.9

$225x^2 + 6\,889 - 3\,320x + 400x^2 - 180x - 1\,989 = 0$

$$625x^2 - 3\,500x + 4\,900 = 0 \qquad /:25$$
$$25x^2 - 140x + 196 = 0$$

$a = 25$ $\qquad b = -140$ $\qquad c = 196$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-140)\pm\sqrt{(-140)^2-4.25.196}}{2.25} = \frac{140\pm\sqrt{19\,600-19\,600}}{50} = \frac{140\pm 0}{50} = \frac{14}{5} = 2{,}8$$

egy megoldás ⇒ a d egyenes érintő

$$y = \frac{83-20.2{,}8}{9} = \frac{83-56}{9} = 3$$

$T\left(\frac{14}{5}; 3\right)$

Határozzuk meg az ellipszis érintőjének egyenletét a T pontban: $x^2 + 25y^2 - 4x + 50y - 71 = 0$; $T(-6; y_T < 0)$

meghatározzuk az érintési pont hiányzó koordinátáját – behelyettesítjük az ellipszis egyenletébe

$$(-6)^2 + 25y^2 - 4(-6) + 50y - 71 = 0$$
$$36 + 25y^2 + 24 + 50y - 71 = 0$$
$$25y^2 + 50y - 11 = 0$$

$a = 25$ $\qquad b = 50$ $\qquad c = -11$

$$y_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-50\pm\sqrt{50^2-4.25.(-11)}}{2.25} = \frac{-50\pm\sqrt{2\,500+1\,100}}{50} = \frac{-50\pm 60}{50} = \begin{cases} \nearrow \frac{1}{5} = 0{,}2 \\ \searrow -\frac{11}{5} = -2{,}2 \end{cases}$$

$T(-6; -2{,}2)$

mivel egyedül az egyenes paraméteres egyenlete tartalmazza az illeszkedő pont koordinátáit:

t: $x = -6 + s_1 t$
$\quad y = -2{,}2 + s_2 t$

ahol az érintő irányvektora: $\vec{s}(s_1; s_2)$

ha az érintő nem párhuzamos semelyik tengellyel, akkor az egyik koordinátáját megválaszthatjuk (nem 0)

legyen: $s_2 = 1$

$\vec{s}(s_1; 1)$

t: $x = -6 + s_1 t \quad = s_1 t - 6$
$\quad y = -2{,}2 + 1.t = t - 2{,}2$

behelyettesítjük az ellipszis egyenletébe

$$(s_1.t - 6)^2 + 25(t - 2{,}2)^2 - 4(s_1.t - 6) + 50(t - 2{,}2) - 71 = 0$$

felbontjuk a zárójeleket

$$s_1^2t^2 - 12s_1.t + 36 + 25(t^2 - 4{,}4t + 4{,}84) - 4s_1.t + 24 + 50t - 110 - 71 = 0$$
$$s_1^2t^2 - 16s_1.t + 50t - 121 + 25t^2 - 110t + 121 = 0$$
$$s_1^2t^2 + 25t^2 - 16s_1.t - 60t = 0$$

párokban kiemelünk t^2-et és t-t, hogy csak egy másodfokú és egy lineáris tag legyen

$$t^2(s_1^2 + 25) + t(-16s_1 - 60) = 0$$

$a = s_1^2 + 25$ $\qquad b = -16s_1 - 60$ $\qquad c = 0$

a másodfokú egyenlet megoldásainak száma a D-től függ: egy megoldás ⇔ D = 0

$$D = b^2 - 4ac = (-16s_1 - 60)^2 - 4.(s_1^2 + 25).0 = (-16s_1 - 60)^2$$
$$(-16s_1 - 60)^2 = 0$$
$$-16s_1 - 60 = 0$$
$$-16s_1 = 60$$
$$s_1 = -\frac{15}{4} = -3{,}75$$

$\vec{s}\left(-\frac{15}{4}; 1\right) \sim (-15; 4)$

vagyis az érintő paraméteres egyenletének végleges alakja:

t: $x = -6 - 15t \qquad /.4$
$\quad y = -2{,}2 + 4t \qquad /.15$

$4x = -24 - 60t$
$15y = -33 + 60t$
$4x + 15y = -57$

$t: 4x + 15y + 57 = 0$

Írjuk fel az ellipszis azon érintőjének egyenletét, mely párhuzamos az adott egyenessel:

a, $\mathscr{E}: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$
a: $5x - 8y + 4 = 0$

b, $\mathscr{E}: 25x^2 + 4y^2 + 50x - 16y - 359 = 0$
b: $x = 5 + 3t$
$y = -2 + 10t$

a,

az egyenes általános egyenletéből meghatározzuk az egyenes normálvektorát: $\vec{n}(5; -8)$
ha egy egyenes párhuzamos egy adott egyenessel, akkor ezek normálvektorai is párhuzamosak → akár ezt a normálvektort is használhatjuk
tehát ismerjük az érintő normálvektorát ⇒ felírjuk az érintő általános egyenletének előzetes alakját

$t: 5x - 8y + q = 0$

úgy kell meghatároznunk a q értékét, hogy az egyenes érintő legyen (az egyenletrendszernek egy megoldása legyen)
az érintő egyenletéből kifejezzük az x-et

$$5x = 8y - q$$
$$x = \frac{8y-q}{5}$$

behelyettesítjük az ellipszis rendezett (a törteket eltüntetve) egyenletébe

$$25x^2 + 36y^2 = 900$$
$$25.\left(\frac{8y-q}{5}\right)^2 + 36y^2 = 900$$

négyzetre emeljük; egyszerűsítjük; összevonjuk a tagokat és redukáljuk az egyenletet

$$25.\frac{64y^2-16qy+q^2}{25} + 36y^2 = 900$$
$$64y^2 - 16qy + q^2 + 36y^2 = 900$$
$$100y^2 - 16qy + q^2 = 900$$
$$100y^2 - 16qy + q^2 - 900 = 0$$

$a = 100$ $\quad$ $b = -16q$ $\quad$ $c = q^2 - 900$

a másodfokú egyenlet megoldásainak száma a D-től függ: egy megoldás ⇔ D = 0

$D = b^2 - 4ac = (-16q)^2 - 4.100.(q^2 - 900) = 256q^2 - 400q^2 + 360\,000 = -144q^2 + 360\,000$

$-144q^2 + 360\,000 = 0$ $\quad$ $/+144q^2$
$360\,000 = 144q^2$ $\quad$ $/:144$
$2\,500 = q^2$ $\quad$ $/\sqrt{}$
$50 = |q|$

$q_1 = -50$ $\quad$ $q_2 = 50$

$t_1: 5x - 8y - 50 = 0$ $\quad$ $t_2: 5x - 8y + 50 = 0$

---

b,

az egyenes paraméteres egyenletéből meghatározzuk az egyenes irányvektorát: $\vec{s}(3; 10)$
ha egy egyenes párhuzamos egy adott egyenessel, akkor ezek irányvektorai is párhuzamosak → akár ezt a irányvektort is használhatjuk
tehát ismerjük az érintő irányvektorát ⇒ felírjuk az érintő paraméteres vagy iránytényezős egyenletének előzetes alakját

$$k_t = \frac{s_2}{s_1} = \frac{10}{3}$$

$t: y = \frac{10}{3}x + q$

$$25x^2 + 4.\left(\frac{10}{3}x + q\right)^2 + 50x - 16.\left(\frac{10}{3}x + q\right) - 359 = 0$$
$$25x^2 + 4.\left(\frac{100}{9}x^2 + \frac{20}{3}qx + q^2\right) + 50x - \frac{160}{3}x - 16q - 359 = 0$$

$$25x^2 + \frac{400}{9}x^2 + \frac{80}{3}qx + 4q^2 + 50x - \frac{160}{3}x - 16q - 359 = 0$$
$$\frac{625}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{80}{3}qx + 4q^2 - 16q - 359 = 0$$
$$\frac{625}{9}x^2 + x\left(-\frac{10}{3} + \frac{80}{3}q\right) + 4q^2 - 16q - 359 = 0$$

$a = \frac{625}{9}$ $\qquad$ $b = -\frac{10}{3} + \frac{80}{3}q$ $\qquad$ $c = 4q^2 - 16q - 359$

$$D = b^2 - 4ac = \left(-\frac{10}{3} + \frac{80}{3}q\right)^2 - 4.\frac{625}{9}.(4q^2 - 16q - 359) =$$
$$= \frac{100}{9} - \frac{1\,600}{9}q + \frac{6\,400}{9}q^2 - \frac{10\,000}{9}q^2 + \frac{40\,000}{9}q + \frac{697\,500}{9} = -400q^2 + \frac{12\,800}{3}q + \frac{299\,200}{3}$$

$$-400q^2 + \frac{12\,800}{3}q + \frac{299\,200}{3} = 0 \qquad /.\left(-\frac{3}{400}\right)$$
$$3q^2 - 32q - 748 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4.3.(-748)}}{2.3} = \frac{32 \pm \sqrt{1\,024 + 8\,976}}{6} = \frac{32 \pm 100}{6} = \begin{matrix} \nearrow \quad 22 \\ \searrow -\frac{34}{3} = -11,\overline{3} \end{matrix}$$

t_1: $y = \frac{10}{3}x + 22$ $\qquad$ t_2: $y = \frac{10}{3}x - \frac{34}{3}$

t_1: $10x - 3y + 66 = 0$ $\qquad$ t_2: $10x - 3y - 34 = 0$

Írjuk fel az ellipszis azon érintőjének egyenletét, mely merőleges az adott egyenesre:

a, $\mathscr{E}$: $25x^2 + 9y^2 = 900$ $\qquad$ b, $\mathscr{E}$: $\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$

a: $y = -\frac{4}{5}x + 8$ $\qquad$ b: $24x - 9y + 472 = 0$

a,

az egyenes iránytényezős egyenletéből meghatározzuk az egyenes iránytényezőjét és irányvektorát

$k_a = -\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{s_a}(5; -4)$

merőleges egyenesek irányvektorai is merőlegesek

$\overrightarrow{s_a} \perp \overrightarrow{s_t} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{s_t}(4; 5) \quad \Rightarrow \quad k_t = \frac{5}{4}$

felírjuk a keresett érintő iránytényezős egyenletének előzetes alakját

t: $y = \frac{5}{4}x + q$

behelyettesítjük az ellipszis egyenletébe

$$25x^2 + 9\left(\frac{5}{4}x + q\right)^2 = 900$$
$$25x^2 + 9\left(\frac{25}{16}x^2 + \frac{5}{2}qx + q^2\right) = 900$$
$$25x^2 + \frac{225}{16}x^2 + \frac{45}{2}qx + 9q^2 = 900$$
$$\frac{625}{16}x^2 + \frac{45}{2}qx + 9q^2 - 900 = 0$$

$a = \frac{625}{16}$ $\qquad$ $b = \frac{45}{2}q$ $\qquad$ $c = 9q^2 - 900$

a másodfokú egyenlet megoldásainak száma a D-től függ: egy megoldás ⇔ D = 0

$$D = b^2 - 4ac = \left(\frac{45}{2}q\right)^2 - 4.\frac{625}{16}.(9q^2 - 900) = \frac{2\,025}{4}q^2 - \frac{5\,625}{4}q^2 + 140\,625 = -900q^2 + 140\,625$$

$$-900q^2 + 140\,625 = 0 \qquad /+900q^2$$
$$140\,625 = 900q^2 \qquad /:900$$
$$\frac{625}{4} = q^2 \qquad /\sqrt{}$$
$$\frac{25}{2} = |q|$$

$\frac{25}{2} = q_1$ $\qquad$ $-\frac{25}{2} = q_2$

t_1: $y = \frac{5}{4}x + \frac{25}{2}$ $\qquad$ t_2: $y = \frac{5}{4}x - \frac{25}{2}$

t_1: $5x - 4y + 50 = 0$ $\qquad$ t_2: $5x - 4y - 50 = 0$

---

b, $\overrightarrow{n_b}(24; -9)$

$t \perp b \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_t} \perp \overrightarrow{n_b} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_t}(9; 24) \sim (3; 8)$

$t: 3x + 8y + q = 0$

$$8y = -3x - q$$
$$y = \frac{-3x-q}{8}$$

$$\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \qquad /.100$$
$$(x-3)^2 + 4y^2 = 100$$
$$(x-3)^2 + 4.\left(\frac{-3x-q}{8}\right)^2 = 100$$
$$x^2 - 6x + 9 + 4.\frac{9x^2+6qx+q^2}{64} = 100$$
$$x^2 - 6x + 9 + \frac{9x^2+6qx+q^2}{16} = 100 \qquad /.16$$
$$16x^2 - 96x + 144 + 9x^2 + 6qx + q^2 = 1\,600 \qquad /-1\,600$$
$$25x^2 + x(-96 + 6q) + q^2 - 1\,456 = 0$$

$a = 25$ $\qquad b = -96 + 6q$ $\qquad c = q^2 - 1\,456$

$$D = b^2 - 4ac = (-96 + 6q)^2 - 4.25.(q^2 - 1\,456) = 9\,216 - 1\,152q + 36q^2 - 100q^2 + 145\,600 =$$
$$= -64q^2 - 1\,152q + 154\,816$$
$$-64q^2 - 1\,152q + 154\,816 = 0 \qquad /:(-64)$$
$$q^2 + 18q - 2\,419 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-18\pm\sqrt{18^2-4.1.(-2\,419)}}{2.1} = \frac{-18\pm\sqrt{324+9\,676}}{2} = \frac{-18\pm100}{2} = \begin{matrix}\nearrow\ 41\\ \searrow -59\end{matrix}$$

$t_1: 3x + 8y - 59 = 0$ $\qquad t_2: 3x + 8y + 41 = 0$