Priebeh funkcie

Vyšetriť priebeh funkcie znamená nájsť všetky vlastnosti funkcie pomocou určitých metód. Kým v prvom a v druhom ročníku nemali sme k dispozícii iba elementárne spôsoby – tabuľku funkčných hodnôt pre zvolené x-ové hodnoty, určenie definičného oboru zistením podmienok, určenie nulových bodov riešením rovnice – deriváciou môžeme niektoré vlastnosti jednoduchšie, ľahšie a skôr určiť. Niektoré spôsoby ostali (nedajú sa nahradiť inou metódou), niektoré môžeme nahradiť využitím derivácie funkcie.
Poradie určenia týchto vlastností nie sú pevne určené, niektoré tie kroky môžeme aj vymeniť. Cieľom je určiť čo najviac vlastností tej funkcie, aby sa dal graf funkcie čím presnejšie nakresliť. Niektoré vlastnosti ani nepoznáme, lebo nepatria do stredoškolskej látky – možno stretnete na vysokej škole.

Ukážeme na niekoľkých funkciách vyšetrenie ich priebehu.

príklad:

Vyšetrite priebeh funkcie:

a, $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ b, $g(x) = (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$

c, $h(x) = \frac{x}{x^2-1} + x$ d, $i(x) = \frac{8x}{x^2+1}$

a, $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

spojitosť

funkcia je spojitá – pre všetky x sa dá vypočítať

definičný obor

$D_f = \mathbb{R}$

monotónnosť

$f'(x) = (3x^4 + 4x^3)' = 12x^3 + 12x^2$

$$f'(x) > 0$$
$$12x^3 + 12x^2 > 0$$
$$12x^2(x+1) > 0$$
$$x + 1 > 0$$
$$x > -1$$

$x \in (-1; \infty)$ m.↑.

$$f'(x) < 0$$
$$12x^2(x+1) < 0$$
$$x < -1$$

$x \in (-\infty; -1)$ m.↓.

stacionárne body

$$f'(x) = 0$$
$$12x^3 + 12x^2 = 0$$
$$12x^2(x+1) = 0$$

$x_1 = 0;\quad x_2 = -1$

$f''(x) = (12x^3 + 12x^2)' = 36x^2 + 24x$

$f''(x_1) = f''(0) = 36.0^2 + 24.0 = 0$

$f''(x_2) = f''(-1) = 36.(-1)^2 + 24.(-1) = 36 - 24 = 12$

$12 \neq 0\ \wedge$ 2. derivácia $\Rightarrow$ v x_2 má extrém

$12 > 0 \Rightarrow$ v bode $x_2 = -1$ má lokálne minimum – aj globálne

$f(x_2) = f(-1) = 3.(-1)^4 + 4.(-1)^3 = 3 - 4 = -1$

$M_{in} = (-1; -1)$

$$f''(x) = 0$$
$$36x^2 + 24x = 0$$
$$12x(3x+2) = 0$$

$x_3 = x_1 = 0;\quad x_4 = -\frac{2}{3}$

$f'''(x) = (36x^2 + 24x)' = 72x + 24$

$f'''(x_1) = f'''(0) = 72.0 + 24 = 24$

$24 \neq 0 \Rightarrow$ v bode $x_1 = 0$ má inflexný bod

$f(x_1) = f(0) = 3.0^4 + 4.0^3 = 0$

$I_1 = (0; 0)$

$f'''(x_4) = f'''\left(-\frac{2}{3}\right) = 72.\left(-\frac{2}{3}\right) + 24 = -24$

$-24 \neq 0 \Rightarrow$ v bode $x_4 = -\frac{2}{3}$ má inflexný bod

$f(x_4) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3.\left(-\frac{2}{3}\right)^4 + 4.\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{16}{27}$

$I_2 = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{16}{27}\right)$

nulové body

$X(x; 0) \in x$; $Y(0; y) \in y$

$$f(x) = 0$$
$$3x^4 + 4x^3 = 0$$
$$x^3(3x + 4) = 0$$

$x_5 = 0$; $\quad x_6 = -\frac{4}{3}$

$X_1(0; 0) = I_1$; $X_2\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$

$f(0) = 3.0^4 + 4.0^3 = 0$

$Y(0; 0) = I_2 = X_1$

párnosť – nepárnosť

$f(x) = 3x^4 + 4x^3$

$f(-x) = 3.(-x)^4 + 4(-x)^3 = 3x^4 - 4x^3 \neq \pm f(x)$

funkcia nie je párna ani nepárna

limita v ±∞

$\lim_{x\to\infty} (3x^4 + 4x^3) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} (3x^4 + 4x^3) = \infty$

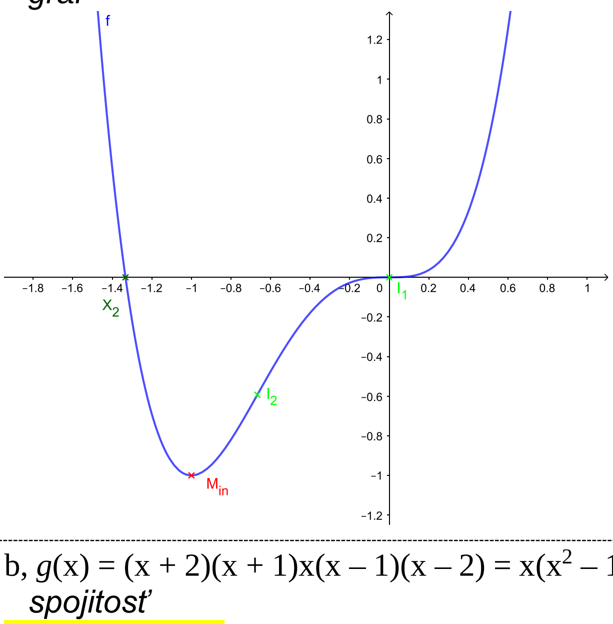
ohraničenosť

funkcia je zdola ohraničená

obor funkčných hodnôt

$H_f = \langle -1; \infty)$

graf



---

b, $g(x) = (x + 2)(x + 1)x(x - 1)(x - 2) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4) = x(x^4 - 5x^2 + 4) = x^5 - 5x^3 + 4x$

spojitosť

funkcia je spojitá – pre všetky x sa dá vypočítať

definičný obor

$D_g = \mathbb{R}$

monotónnosť

$g'(x) = (x^5 - 5x^3 + 4x)' = 5x^4 - 15x^2 + 4$

$g'(x) > 0$

$5x^4 - 15x^2 + 4 > 0$

substitúcia: $a = x^2$

$5a^2 - 15a + 4 > 0$

$5a^2 - 15a + 4 = 0$

$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2-4.5.4}}{2.5} = \frac{15 \pm \sqrt{225-80}}{10} = \frac{15 \pm 12{,}04}{10} = \begin{matrix} \nearrow 2{,}704 \\ \searrow 0{,}296 \end{matrix}$

$2{,}704 = x^2$

$1{,}644 = |x|$

$x_1 = -1{,}644; \quad x_2 = 1{,}644$

$0{,}296 = x^2$

$0{,}544 = |x|$

$x_3 = -0{,}544; \quad x_4 = 0{,}544$

dosadíme body do prvej derivácie

interval x	(-∞; -1,644) -2	(-1,644; -0,544) -1	(-0,544; 0,544) 0	(0,544; 1,644) 1	(1,644; ∞) 2
$5x^4 - 15x^2 + 4$	24	-6	4	-6	24
znamienko	+	–	+	–	+

$x \in (-\infty; -1{,}644) \cup (-0{,}544; 0{,}544) \cup (1{,}644; \infty)$ m.↑.

$x \in (-1{,}644; -0{,}544) \cup (0{,}544; 1{,}644)$ m.↓.

stacionárne body

$g'(x) = 0$

$5x^4 - 15x^2 + 4 = 0$

$x_1 = -1{,}644; \quad x_2 = 1{,}644; \quad x_3 = -0{,}544; \quad x_4 = 0{,}544$

$g''(x) = (5x^4 - 15x^2 + 4)' = 20x^3 - 30x$

$g''(x_1) = g''(-1{,}644) = 20.(-1{,}644)^3 - 30.(-1{,}644) = -39{,}603$

$-39{,}603 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivácia $\Rightarrow$ v x_1 má extrém

$-39{,}603 < 0 \ \Rightarrow$ v bode $x_1 = -1{,}644$ má lokálne maximum

$g(x_1) = g(-1{,}644) = (-1{,}644)^5 - 5.(-1{,}644)^3 + 4.(-1{,}644) = 3{,}631$

$M_{ax1} = (-1{,}644; 3{,}621)$

$g''(x_2) = g''(1{,}644) = 20.1{,}644^3 - 30.1{,}644 = 39{,}603$

$39{,}603 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivácia $\Rightarrow$ v x_2 má extrém

$39{,}603 > 0 \ \Rightarrow$ v bode $x_2 = 1{,}644$ má lokálne minimum

$g(x_2) = g(1{,}644) = 1{,}644^5 - 5.1{,}644^3 + 4.1{,}644 = -3{,}631$

$M_{in2} = (1{,}644; -3{,}631)$

$g''(x_3) = g''(-0{,}544) = 20.(-0{,}544)^3 - 30.(-0{,}544) = 13{,}099$

$13{,}099 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivácia $\Rightarrow$ v x_3 má extrém

$13{,}099 > 0 \ \Rightarrow$ v bode $x_3 = -0{,}544$ má lokálne minimum

$g(x_3) = g(-0{,}544) = (-0{,}544)^5 - 5.(-0{,}544)^3 + 4.(-0{,}544) = -1{,}419$

$M_{in1} = (-0{,}544; -1{,}419)$

$g''(x_4) = g''(0{,}544) = 20.0{,}544^3 - 30.0{,}544 = -13{,}099$

$-13{,}099 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivácia $\Rightarrow$ v x_4 má extrém

$-13{,}099 < 0 \ \Rightarrow$ v bode $x_4 = 0{,}544$ má lokálne maximum

$g(x_4) = g(0{,}544) = 0{,}544^5 - 5.0{,}544^3 + 4.0{,}544 = 1{,}419$

$M_{ax2} = (0{,}544; 1{,}419)$

$g''(x) = 0$

$20x^3 - 30x = 0$

$10x(2x^2 - 3) = 0$

$2x^2 - 3 = 0$

$2x^2 = 3$

$x^2 = \frac{3}{2}$

$|x| = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$x_5 = 0; \quad x_6 = -\sqrt{\frac{3}{2}}; \quad x_7 = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$g'''(x) = (20x^3 - 30x)' = 60x^2 - 30$

$g'''(x_5) = g'''(0) = 60.0^2 - 30 = -30$

$-30 \neq 0 \Rightarrow$ v bode $x_5 = 0$ má inflexný bod

$g(x_5) = g(0) = 0^5 - 5.0^3 + 4.0 = 0$

$I_1 = (0; 0)$

$g'''(x_6) = g'''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 60.\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 30 = 60$

$60 \neq 0 \Rightarrow$ v bode $x_6 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ má inflexný bod

$g(x_6) = g\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5 - 5.\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 + 4.\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 1{,}531$

$I_2 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}; 1{,}531\right)$

$g'''(x_7) = g'''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 60.\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - 30 = 60$

$60 \neq 0 \Rightarrow$ v bode $x_7 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ má inflexný bod

$g(x_7) = g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5 - 5.\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 + 4.\sqrt{\frac{3}{2}} = -1{,}531$

$I_3 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}; -1{,}531\right)$

nulové body

$X(x; 0) \in x$; $Y(0; y) \in y$

$g(x) = 0$

$(x + 2)(x + 1)x(x - 1)(x - 2) = 0$

$x_8 = -2; \quad x_9 = -1; \quad x_{10} = 0; \quad x_{11} = 1; \quad x_{12} = 2$

$X_1(-2; 0)$; $X_2(-1; 0)$; $X_3(0; 0) = I_1$; $X_4(1; 0)$; $X_5(2; 0)$

$f(0) = 0^5 - 5.0^3 + 4.0 = 0$

$Y(0; 0) = I_1 = X_3$

párnosť – nepárnosť

$g(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

$g(-x) = (-x)^5 - 5(-x)^3 + 4(-x) = -x^5 + 5x^3 - 4x = -g(x)$

$g(-x) = -g(x) \Rightarrow$ funkcia je nepárna – graf funkcie je stredovo súmerný podľa O

limita v ±∞

$\lim_{x\to\infty}(x^5 - 5x^3 + 4x) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x^5 - 5x^3 + 4x) = -\infty$

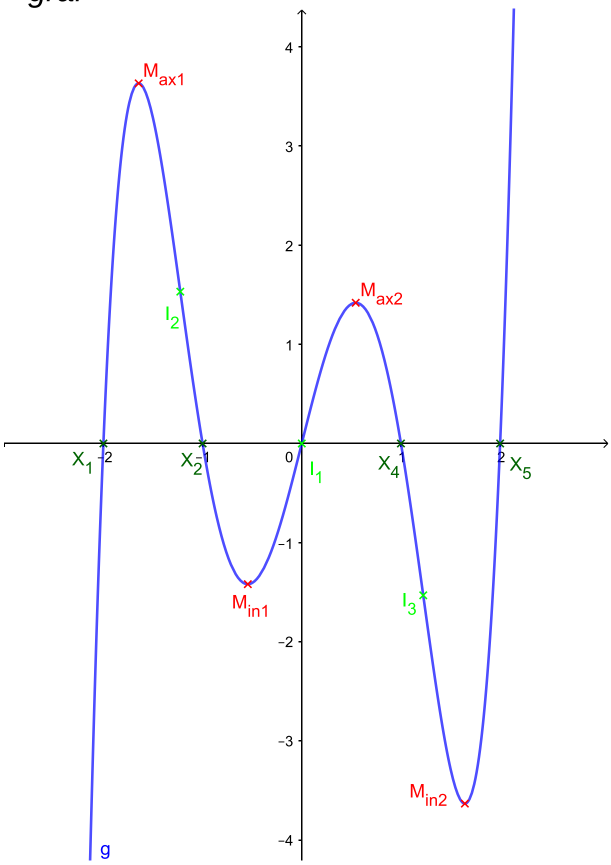
ohraničenosť

funkcia nie je ohraničená

obor funkčných hodnôt

$H_g = \mathbb{R}$

graf



---

c, $h(x) = \frac{x}{x^2-1} + x = \frac{x+x(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{x+x^3-x}{x^2-1} = \frac{x^3}{x^2-1}$

spojitosť

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$(x + 1)(x - 1) \neq 0$$

funkcia nie je spojitá v bodoch $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$

definičný obor

$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

monotónnosť

$$h'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1} + x\right)' = \frac{x'.(x^2-1)-x.(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} + 1 = \frac{1.(x^2-1)-x.2x}{(x^2-1)^2} + 1 = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} + 1 = \frac{-x^2-1+x^4-2x^2+1}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$h'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^3)'.(x^2-1)-x^3.(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2.(x^2-1)-x^3.2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$h'(x) > 0$$

$$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} > 0$$

$$x^4 - 3x^2 > 0$$

$$x^2(x^2 - 3) > 0$$

$$x^2 - 3 > 0$$

$$x^2 > 3$$

$$|x| > \sqrt{3}$$

$x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right)$ m.↑.

$$h'(x) < 0$$

$$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} < 0$$

$$|x| < \sqrt{3}$$

$x \in \left(-\sqrt{3}; -1\right) \cup (-1; 1) \cup \left(1; \sqrt{3}\right)$ m.↓.

stacionárne body

$$h'(x) = 0$$
$$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = 0$$
$$x^4 - 3x^2 = 0$$
$$x^2(x^2 - 3) = 0$$
$x_3 = 0$
$$x^2 - 3 = 0$$
$$x^2 = 3$$
$$|x| = \sqrt{3}$$
$x_4 = -\sqrt{3}; \quad x_5 = \sqrt{3}$

$$h''(x) = \left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{(x^4-3x^2)'.(x^2-1)^2-(x^4-3x^2).\left((x^2-1)^2\right)'}{((x^2-1)^2)^2} = \frac{(4x^3-6x).(x^2-1)^2-(x^4-3x^2).2(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4} =$$
$$= \frac{(x^2-1)[(4x^3-6x)(x^2-1)-4x(x^4-3x^2)]}{(x^2-1)^4} = \frac{4x^5-4x^3-6x^3+6x-4x^5+12x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$h''(x_3) = h''(0) = \frac{2.0(0^2+3)}{(0^2-1)^3} = 0$

$h''(x_4) = h''(-\sqrt{3}) = \frac{2.(-\sqrt{3})\left((-\sqrt{3})^2+3\right)}{\left((-\sqrt{3})^2-1\right)^3} = \frac{-2\sqrt{3}(3+3)}{(3-1)^3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{3\sqrt{3}}{2} \neq 0 \ \wedge$ 2. derivácia $\Rightarrow$ v x_4 má extrém

$-\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \ \Rightarrow$ v bode $x_4 = -\sqrt{3}$ má lokálne maximum

$h(x_4) = h(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2-1} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$M_{ax} = \left(-\sqrt{3};\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$h''(x_5) = h''(\sqrt{3}) = \frac{2.\sqrt{3}(\sqrt{3}^2+3)}{(\sqrt{3}^2-1)^3} = \frac{2\sqrt{3}(3+3)}{(3-1)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} \neq 0 \ \wedge$ 2. derivácia $\Rightarrow$ v x_5 má extrém

$\frac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \ \Rightarrow$ v bode $x_5 = \sqrt{3}$ má lokálne minimum

$h(x_5) = h(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}^3}{\sqrt{3}^2-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$M_{in} = \left(\sqrt{3};\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$h''(x) = 0$$
$$\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0$$
$$x = 0$$
$x_3 = 0$

$h'''(x) = \left(\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}\right)' = \left(\frac{2x^5+4x^3-6x}{(x^2-1)^4}\right)' = \ldots = -\frac{6x^4+36x^2+6}{(x^2-1)^4}$

$h'''(x_3) = h'''(0) = -\frac{6.0^4+36.0^2+6}{(0^2-1)^4} = \frac{6}{1} = 6$

$6 \neq 0 \ \Rightarrow$ v bode $x_3 = 0$ má inflexný bod

$h(x_3) = h(0) = \frac{0^3}{0^2-1} = 0$

$I = (0; 0)$

nulové body

$X(x; 0) \in x;\ Y(0; y) \in y$
$$h(x) = 0$$
$$\frac{x^3}{x^2-1} = 0$$

$x = 0$

$x_6 = 0$

$XY(0; 0) = I$

párnosť – nepárnosť

$h(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

$h(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -h(x)$

$h(-x) = -h(x)$ $\Rightarrow$ funkcia je nepárna – graf funkcie je stredovo súmerný podľa O

limita v ±∞

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$

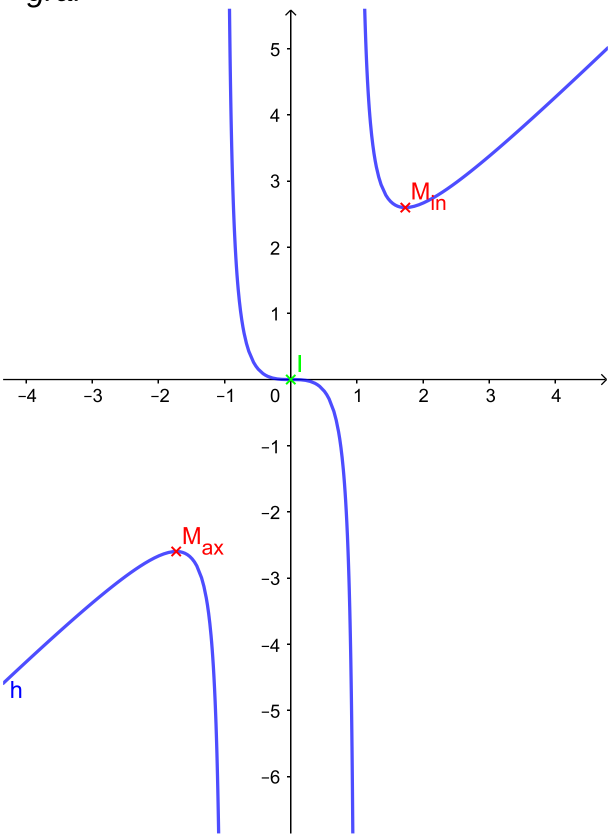
ohraničenosť

funkcia nie je ohraničená

obor funkčných hodnôt

$H_h = \mathbb{R}$

graf



---

d, $i(x) = \frac{8x}{x^2+1}$

spojitosť

$x^2 + 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \nexists x$

funkcia je spojitá – pre všetky x sa dá vypočítať

definičný obor

$D_i = \mathbb{R}$

monotónnosť

$i'(x) = \left(\frac{8x}{x^2+1}\right)' = \frac{(8x)'.(x^2+1)-8x.(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{8.(x^2+1)-8x.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{8x^2+8-16x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{8-8x^2}{(x^2+1)^2}$

$i'(x) > 0$

$$\frac{8-8x^2}{(x^2+1)^2} > 0$$
$$8 - 8x^2 > 0$$
$$8 > 8x^2$$
$$1 > x^2$$
$$1 > |x|$$

$x \in (-1; 1)$ m.↑.

$$i'(x) < 0$$
$$\frac{8-8x^2}{(x^2+1)^2} < 0$$
$$1 < |x|$$

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ m.↓.

stacionárne body

$$i'(x) = 0$$
$$\frac{8-8x^2}{(x^2-1)^2} = 0$$
$$8 - 8x^2 = 0$$
$$1 - x^2 = 0$$
$$1 = x^2$$
$$1 = |x|$$

$x_1 = -1;\quad x_2 = 1$

$$i''(x) = \left(\frac{8-8x^2}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(8-8x^2)'.(x^2+1)^2-(8-8x^2).\left((x^2+1)^2\right)'}{((x^2+1)^2)^2} = \frac{-16x.(x^2+1)^2-(8-8x^2).2(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4} =$$
$$= \frac{(x^2+1)[-16x(x^2+1)-4x(8-8x^2)]}{(x^2+1)^4} = \frac{-16x^3-16x-32x+32x^3}{(x^2+1)^3} = \frac{16x^3-48x}{(x^2+1)^3} = \frac{16x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$i''(x_1) = i''(-1) = \frac{16(-1)((-1)^2-3)}{((-1)^2+1)^3} = \frac{-16.(-2)}{8} = 4$$

$4 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivácia $\Rightarrow$ v x_1 má extrém

$4 > 0 \ \Rightarrow$ v bode $x_1 = -1$ má lokálne minimum – aj globálne

$$i(x_1) = i(-1) = \frac{8(-1)}{(-1)^2+1} = \frac{-8}{2} = -4$$

$M_{in} = (-1; -4)$

$$i''(x_2) = i''(1) = \frac{16.1(1^2-3)}{(1^2+1)^3} = \frac{16.(-2)}{8} = -4$$

$-4 \neq 0 \ \wedge$ 2. derivácia $\Rightarrow$ v x_2 má extrém

$-4 < 0 \ \Rightarrow$ v bode $x_2 = 1$ má lokálne maximum – aj globálne

$$i(x_2) = i(1) = \frac{8.1}{1^2+1} = \frac{8}{2} = 4$$

$M_{ax} = (1; 4)$

$$i''(x) = 0$$
$$\frac{16x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0$$
$$16x(x^2-3) = 0$$
$$x^2 - 3 = 0$$
$$x^2 = 3$$
$$|x| = \sqrt{3}$$

$x_3 = 0;\quad x_4 = -\sqrt{3};\quad x_5 = \sqrt{3}$

$$i'''(x) = \left(\frac{16x^3-48x}{(x^2+1)^3}\right)' = \ldots = \frac{-48x^4+288x^2-48}{(x^2+1)^4}$$

$$i'''(x_3) = i'''(0) = \frac{-48.0^4+288.0^2-48}{(0^2+1)^4} = \frac{-48}{1} = -48$$

$-48 \neq 0 \ \Rightarrow$ v bode $x_3 = 0$ má inflexný bod

$$i(x_3) = i(0) = \frac{8.0}{0^2+1} = 0$$

$I_1 = (0; 0)$

$i'''(x_4) = i'''(-\sqrt{3}) = \frac{-48.(-\sqrt{3})^4+288.(-\sqrt{3})^2-48}{((-\sqrt{3})^2+1)^4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$1{,}5 \neq 0 \Rightarrow$ v bode $x_4 = -\sqrt{3}$ má inflexný bod

$i(x_4) = i(-\sqrt{3}) = \frac{8.(-\sqrt{3})}{(-\sqrt{3})^2+1} = -2\sqrt{3}$

$I_2 = (-\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$

$i'''(x_5) = i'''(\sqrt{3}) = \frac{-48.\sqrt{3}^4+288.\sqrt{3}^2-48}{(\sqrt{3}^2+1)^4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$1{,}5 \neq 0 \Rightarrow$ v bode $x_5 = \sqrt{3}$ má inflexný bod

$i(x_5) = i(\sqrt{3}) = \frac{8.\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2+1} = 2\sqrt{3}$

$I_3 = (\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$

nulové body

$X(x; 0) \in x; Y(0; y) \in y$

$$i(x) = 0$$
$$\frac{8x}{x^2+1} = 0$$
$$x = 0$$

$x_6 = 0$

$XY(0; 0) = I_1$

párnosť – nepárnosť

$i(x) = \frac{8x}{x^2+1}$

$i(-x) = \frac{8.(-x)}{(-x)^2+1} = \frac{-8x}{x^2-1} = -i(x)$

$i(-x) = -i(x) \Rightarrow$ funkcia je nepárna – graf gunkcie je stredovo súmerný podľa O

limita v ±∞

$\lim_{x\to\infty} \frac{8x}{x^2+1} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{x^2+1} = 0$

ohraničenosť

funkcia je aj zdola aj zhora ohraničená

obor funkčných hodnôt

$H_i = \langle -4; 4 \rangle$

graf