Derivácia a monotónnosť

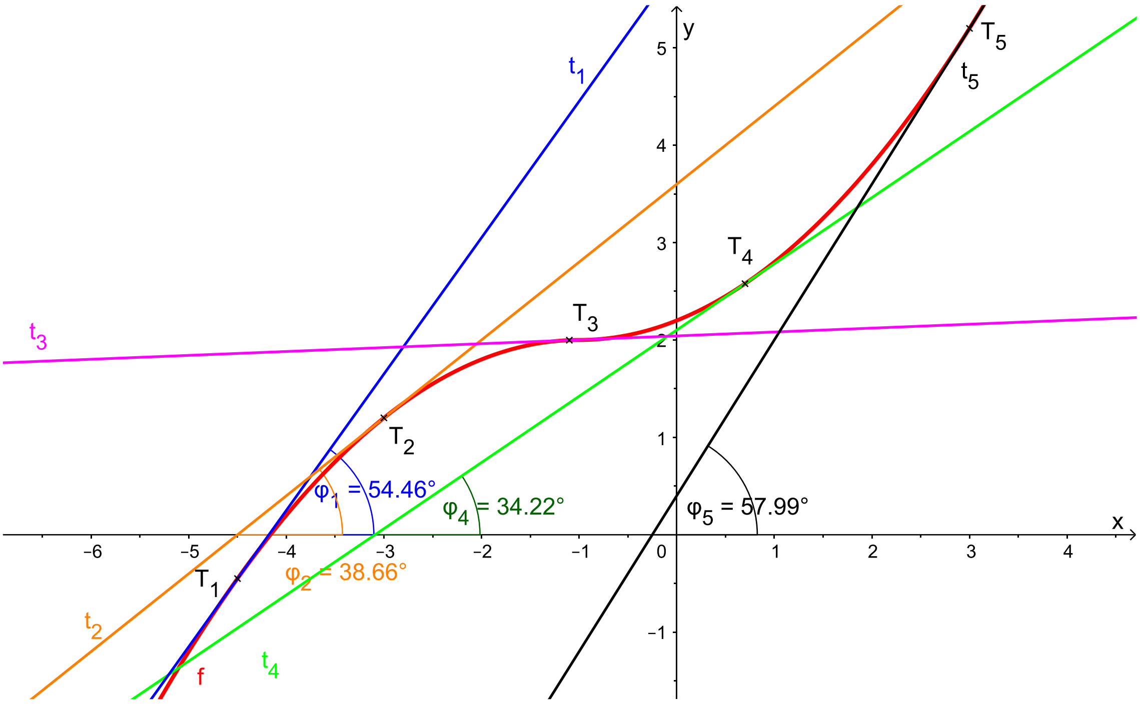
Skúsme nájsť vzťah medzi hodnotou derivácie a monotónnosťou funkcie.

D. Funkcia f je na intervale I_1 ***rastúca***, ak na tom intervale k väčším x-ovým hodnotám patria väčšie funkčné hodnoty.

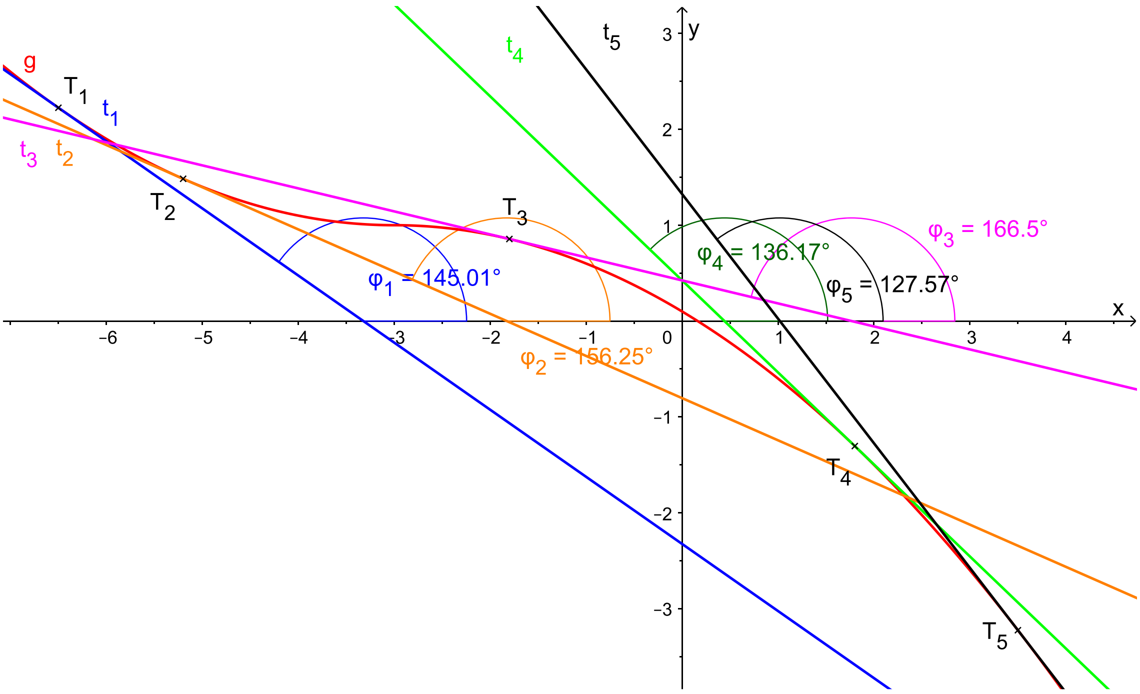
$$I_1 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I_1: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

D. Funkcia f je na intervale I_2 ***klesajúca***, ak na tom intervale k väčším x-ovým hodnotám patria menšie funkčné hodnoty

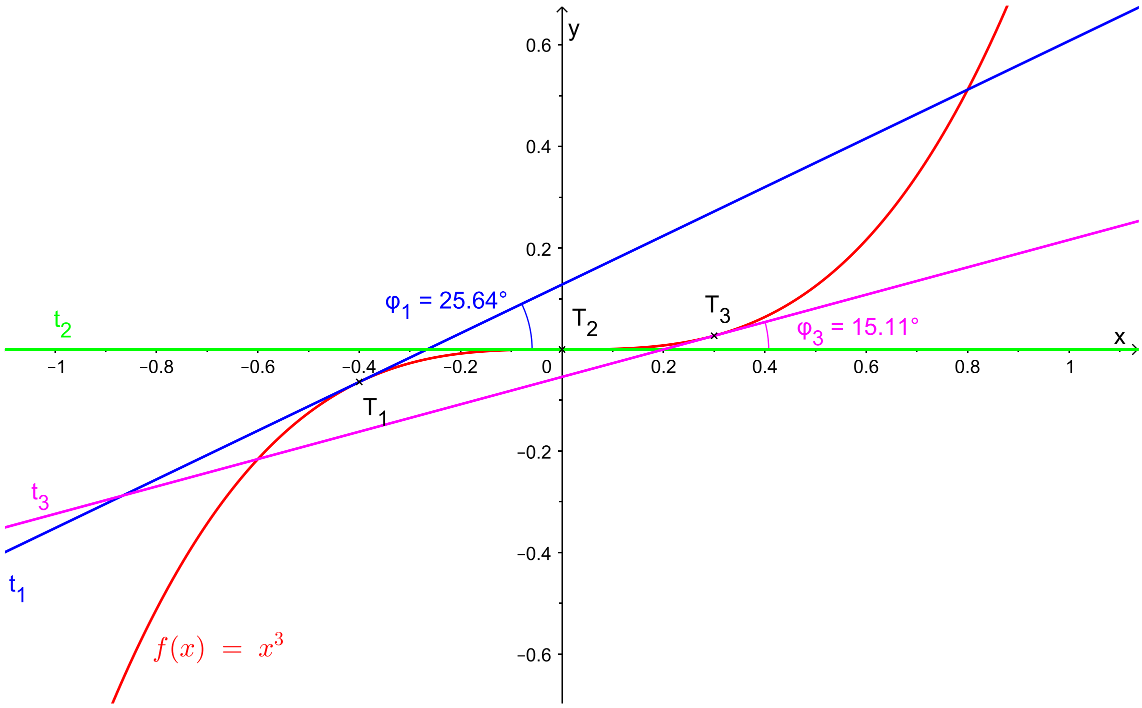
$$I_2 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_3, x_4 \in I_2: x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_3) > f(x_4)$$



Na prvom obrázku máme časť grafu funkcie f, kde je rastúca, a v niekoľkých bodoch k nej dotyčnice. Vidíme, že dotyčnice zvierajú ostré uhly s x-ovou osou (smerové uhly). Tangensové hodnoty (smernice) takýchto uhlov sú kladné. Takže hodnoty derivácií na takom intervale sú kladné.



Na druhom obrázku máme časť grafu funkcie g, kde je klesajúca, a v niekoľkých bodoch k nej dotyčnice. Vidíme, že dotyčnice zvierajú tupé uhly s x-ovou osou (smerové uhly). Tangensové hodnoty (smernice) takýchto uhlov sú záporné. Takže hodnoty derivácií na takom intervale sú záporné.



Tretí príklad je funkcia $f(x) = x^3$ v okolí začiatku súradnicovej sústavy. V bode $T_2(0; 0)$ dotyčnica je vodorovná, čiže uhol ktorý zviera s x-ovou osou je nulový. Hodnota derivácie, tangens toho uhla je takisto nulová napriek tomu, že funkcia aj v bode $x_2 = 0$ je rastúca

$\forall x_1: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ a takisto

$\forall x_3: x_2 < x_3 \Rightarrow f(x_2) < f(x_3)$.

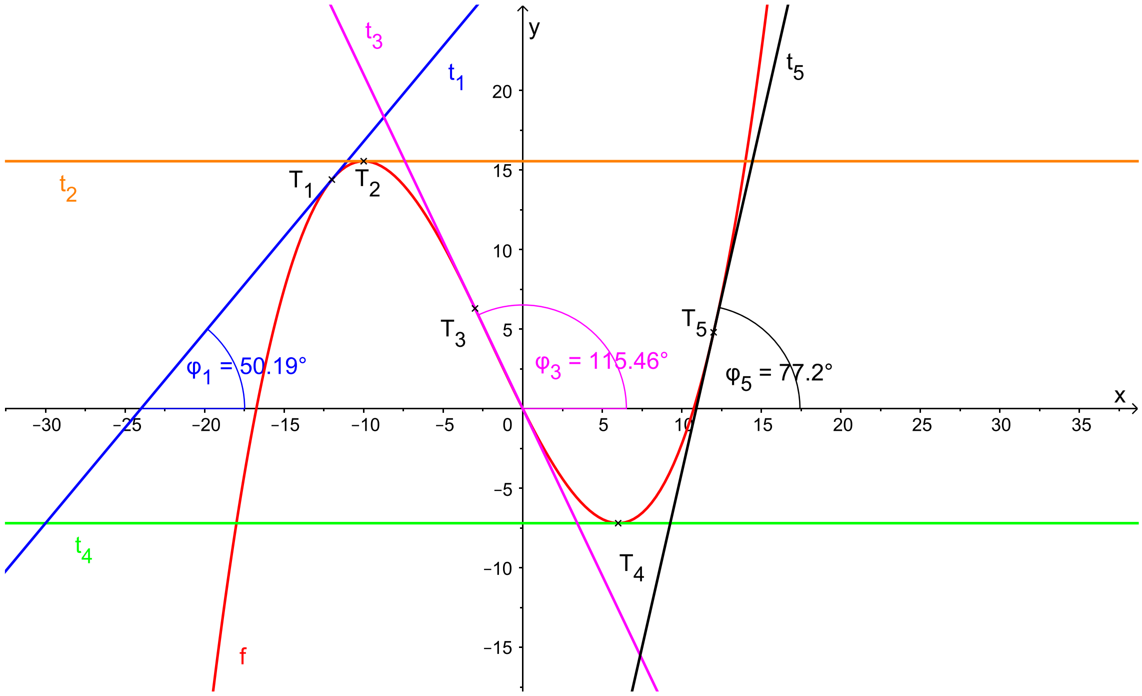
Čo z toho vyplýva? Kde je hodnota derivácie kladná, potom tam funkcia je rastúca; a kde je derivácia záporná, tam zase klesajúca. Ale kde je funkcia rastúca (resp. klesajúca), hodnota derivácie nemusí byť kladná (záporná) – môže byť aj nulová.

V. (žiadúca ale nepostačujúca) Ak hodnoty derivácie funkcie f sú kladné na nejakom intervale I_1, potom funkcia je rastúca na tom intervale.

$\forall x \in I_1: f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je m.↑. na I_1

V. (žiadúca ale nepostačujúca) Ak hodnoty derivácie funkcie f sú záporné na nejakom intervale I_2, potom funkcia je klesajúca na tom intervale.

$\forall x \in I_2: f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je m.↓. na I_2



příklad:

Nájdite intervaly, kde je funkcia rastúca, klesajúca:

a, $f(x) = x^2 + 6x - 7$ b, $g(x) = x^3 - 9x^2 + 2$ c, $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{5}{x-3}$

najprv derivujeme funkciu

$f'(x) = (x^2 + 6x - 7)' = 2x + 6$

určíme interval(-y), kde nadobúda derivácia kladné hodnoty → riešime nerovnicu

$2x + 6 > 0 \qquad /-6$

$2x > -6 \qquad /:2$

$x > -3$

$x \in (-3; \infty)$ m.↑.

a určíme interval(-y), kde nadobúda derivácia záporné hodnoty → riešime nerovnicu

$2x + 6 < 0 \qquad /-6$

$2x < -6 \qquad /:2$

$x < -3$

$x \in (-\infty; -3)$ m.↓.

$g'(x) = (x^3 - 9x^2 + 2)' = 3x^2 - 18x$

$3x^2 - 18x > 0 \qquad /:3$

$x^2 - 6x > 0$

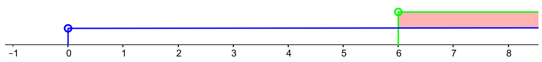
$x(x - 6) > 0$

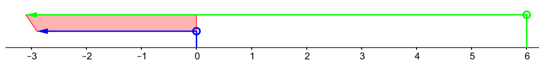
súčin dvoch činiteľov má byť kladný ⇔ ak činitele majú rovnaké znamienka

$(x > 0 \wedge x - 6 > 0) \quad \vee \quad (x < 0 \wedge x - 6 < 0)$

riešime sústavy nerovníc a graficky nájdeme prienik → čiastočné riešenia

$x > 0 \wedge x > 6$ $\qquad$ $x < 0 \wedge x < 6$





$x \in (6; \infty)$ $\qquad$ $x \in (-\infty; 0)$

a celkové riešenie je zjednotenie týchto intervalov

$x \in (-\infty; 0) \cup (6; \infty)$ m.↑.

$3x^2 - 18x < 0 \qquad /:3$

$x^2 - 6x < 0$

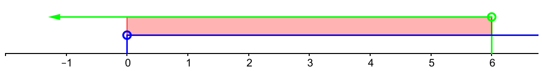
$x(x - 6) < 0$

súčin dvoch činiteľov má byť záporný ⇔ ak činitele majú opačné znamienka

$(x > 0 \wedge x - 6 < 0) \quad \vee \quad (x < 0 \wedge x - 6 > 0)$

riešime sústavy nerovníc a graficky nájdeme prienik → čiastočné riešenia

$x > 0 \wedge x < 6$ $\qquad$ $x < 0 \wedge x > 6$



$x \in (0; 6)$ $\qquad$ nemá prienik

$x \in (0; 6)$ m.↓.

$h(x) = \frac{1}{x} - \frac{5}{x-3}$

táto funkcia nie je spojitá – z definičného oboru chýbajú body (menovateľ sa nesmie rovnať nule)

$x \neq 0$

$x - 3 \neq 0$

$x \neq 3$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

$h'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{5}{x-3}\right)' = (x^{-1} - 5(x-3)^{-1})' = -1.x^{-2} - 5.(-1).(x - 3)^{-2}.(x - 3)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{5}{(x-3)^2}.1 =$

$= -\frac{1}{x^2} + \frac{5}{(x-3)^2}$

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{5}{(x-3)^2} > 0$$

$$\frac{-(x-3)^2 + 5.x^2}{x^2.(x-3)^2} > 0$$

$$\frac{-(x^2-6x+9)+5x^2}{x^2(x-3)^2} > 0$$

$$\frac{-x^2+6x-9+5x^2}{x^2.(x-3)^2} > 0$$

$$\frac{4x^2+6x-9}{x^2.(x-3)^2} > 0$$

podiel má byť kladný

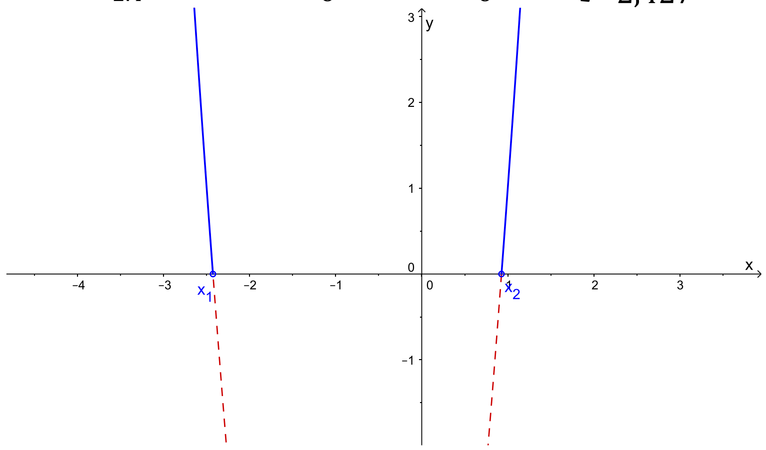
menovateľ je vždy kladný (súčin druhých mocnín), preto stačí skúmať čitateľ

$4x^2 + 6x - 9 > 0$

riešime kvadratickú nerovnicu

$4x^2 + 6x - 9 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.4.(-9)}}{2.4} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+144}}{8} = \frac{-6 \pm 13,42}{8} = \begin{matrix} \nearrow\ 0,927 \\ \searrow -2,427 \end{matrix}$$



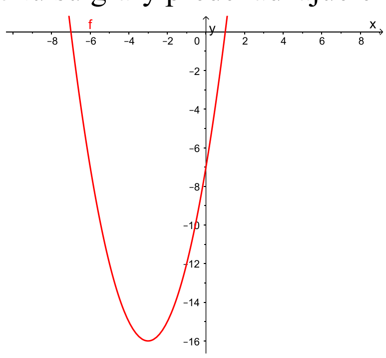
riešením sú čísla naľavo od menšej hodnoty (-2,427) a napravo od väčšej (0,927) – na tých intervaloch je funkcia *h* rastúca

ale funkcia je nespojitá v bodoch {0; 3}, a to ďalej delí monotónne časti funkcie – usporiadame tieto hodnoty podľa veľkosti: -2,427; 0; 0,927; 3

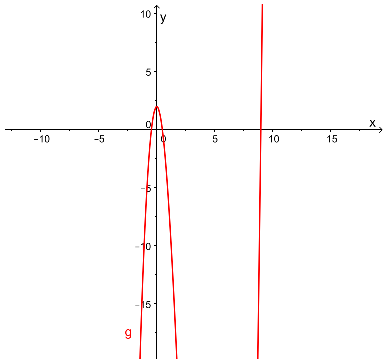
x ∈ (-∞; -2,427) U (0,927; 3) U (3; ∞) m.↑.

x ∈ (-2,427; 0) U (0; 0,927) m.↓.

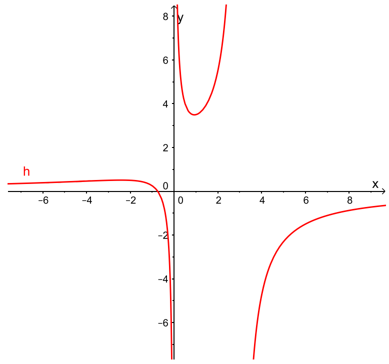
a tu sú grafy predchádzajúcich funkcií



$f(x) = x^2 + 6x - 7$



$g(x) = x^3 - 9x^2 + 2$



$h(x) = \frac{1}{x} - \frac{5}{x-3}$