Binomická veta

V prvom ročníku sme prebrali niekoľko rôznych vzorcov, ktoré sa využívajú pri úpravách výrazov. Boli medzi nimi druhé a tretie mocniny dvojčlena (súčtu aj rozdielu). Zovšeobecnenie práve týchto vzorcov sa volá (***Newtonova***) ***binomická veta***. Pomocou nej dokážeme určiť ľubovoľnú prirodzenú mocninu dvojčlena.

V.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}.b^k =$$

$$= \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}.b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}.b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}.b^3 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}.b^k + \dots + \binom{n}{n-1}a^1.b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

$n \in \mathbb{N}$

Umocnením dvojčlena na n-tú vznikne (n + 1) členný výraz – takzvaný ***binomický rozvoj***. V ňom každý člen sa skladá z troch činiteľov:

- koeficient
- mocnina prvého člena zátvorky (dvojčlena)
- mocnina druhého člena zátvorky

P. Prvý a druhý člen spolu aj so znamienkom treba umocniť. To znamená:

- ak umocníme člen s kladným koeficientom → všetky jeho mocniny budú mať kladné znamienko
- párne mocniny záporného členu sú takisto kladné
- iba nepárne mocniny záporného členu sú záporné (binomický rozvoj rozdielu má striedavo znamienka)

P.

Koeficienty sú kombinačné čísla – jeden riadok Pascalovho trojuholníka.

Mocnina prvého člena zátvorky ide od najväčšej možnej mocniny (n-tá mocnina) a vždy sa zmenšuje o jedno v každom ďalšom člene binomického rozvoja, kým nedosiahne najnižšiu možnú mocninu (nultú).

Naopak – mocnina druhého člena zátvorky sa začína s najmenšou mocninou (nultou), a mocniteľ sa zväčšuje až po n.

P. Nakoľko n nad nulou, a takisto aj n nad n, sa rovná jednej $\left[\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\right]$; a nultá mocnina výrazov a čísel (okrem nuly na nultú – čo neexistuje) sa rovná jednej ⇒ prvý člen je iba n-tá mocnina prvého člena a posledný člen binomického rozvoja je iba n-tá mocnina druhého člena zátvorky.

Koeficient druhého a predposledného člena je presne n, lebo $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Takže binomický rozvoj prejde do zjednodušeného tvaru:

$$(a+b)^n = a^n + n.a^{n-1}.b + \binom{n}{2}a^{n-2}.b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}.b^3 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}.b^k + \dots + n.a.b^{n-1} + b^n$$

Keď je otázkou iba konkrétny člen binomického rozvoja, ako to určiť. Označme ten člen, ako k-tý člen (poradové číslo) rozvoja.

1. člen:	$\binom{n}{0}a^n b^0$
2. člen	$\binom{n}{1}a^{n-1}.b^1$
3. člen	$\binom{n}{2}a^{n-2}.b^2$
4. člen	$\binom{n}{3}a^{n-3}.b^3$
…	
k-tý člen	$\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}.b^{k-1}$

$$a_k = \binom{n}{k-1}a^{n-k+1}.b^{k-1}$$

príklad:

Napíšte binomický rozvoj mocnín:

a, $(5x^2+3)^5$ b, $(3x^3-4)^6$ c, $(-2x+4x^3)^7$

d, $(-2x-1)^8$ e, $\left(3x-\frac{4}{3}\right)^7$ f, $\left(\frac{2x^2}{3}+\frac{9}{4x}\right)^6$

koeficienty z Pascalovho trojuholníka sú: 1, 5, 10, 10, 5, 1

$(5x^2+3)^5 = 1.(5x^2)^5.3^0 + 5.(5x^2)^4.3^1 + 10.(5x^2)^3.3^2 + 10.(5x^2)^2.3^3 + 5.(5x^2)^1.3^4 + 1.(5x^2)^0.3^5 =$

$= 3\,125x^{10} + 5.625x^8.3 + 10.125x^6.9 + 10.25x^4.27 + 5.5x^2.81 + 243 =$
$= 3\,125x^{10} + 9\,375x^8 + 11\,250x^6 + 6\,750x^4 + 2\,025x^2 + 243$

koeficienty sú: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
$(3x^3 – 4)^6 = 1.(3x^3)^6.(-4)^0 + 6.(3x^3)^5.(-4)^1 + 15.(3x^3)^4.(-4)^2 + 20.(3x^3)^3.(-4)^3 + 15.(3x^3)^2.(-4)^4 +$
$+ 6.(3x^3)^1.(-4)^5 + 1.(3x^3)^0.(-4)^6 = 729x^{18} + 6.243x^{15}.(-4) + 15.81x^{12}.16 + 20.27x^9.(-64) +$
$+ 15.9x^6.256 + 6.3x^3.(-1\,024) + 4\,096 =$
$= 729x^{18} – 5\,832x^{15} + 19\,440x^{12} – 34\,560x^9 + 34\,560x^6 – 18\,432x^3 + 4\,096$

koeficienty sú: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1
$(-2x + 4x^3)^7 = 1.(-2x)^7.(4x^3)^0 + 7.(-2x)^6.(4x^3)^1 + 21.(-2x)^5.(4x^3)^2 + 35.(-2x)^4.(4x^3)^3 + 35.(-2x)^3.(4x^3)^4 +$
$+ 21.(-2x)^2.(4x^3)^5 + 7.(-2x)^1.(4x^3)^6 + 1.(-2x)^0.(4x^3)^7 = -128x^7 + 7.64x^6.4x^3 + 21.(-32)x^5.16x^6 +$
$+ 35.16x^4.64x^9 + 35.(-8)x^3.256x^{12} + 21.4x^2.1\,024x^{15} + 7.(-2)x.4\,096x^{18} + 16\,384x^{21} =$
$= -128x^7 + 1\,792x^9 – 10\,752x^{11} + 35\,840x^{13} – 71\,680x^{15} + 86\,016x^{17} – 57\,344x^{19} + 16\,384x^{21}$

koeficienty sú: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1
upravíme – vyjmeme v zátvorke -1 a potom umocníme
$(-2x – 1)^8 = [-1.(2x + 1)]^8 = (-1)^8.(2x + 1)^8 = 1.(2x + 1)^8 = (2x + 1)^8 = 1.(2x)^8.1^0 + 8.(2x)^7.1^1 +$
$+ 28.(2x)^6.1^2 + 56.(2x)^5.1^3 + 70.(2x)^4.1^4 + 56.(2x)^3.1^5 + 28.(2x)^2.1^6 + 8.(2x)^1.1^7 + 1.(2x)^0.1^8 =$
$= 256x^8 + 8.128x^7 + 28.64x^6 + 56.32x^5 + 70.16x^4 + 56.8x^3 + 28.4x^2 + 8.2x + 1 =$
$= 256x^8 + 1\,024x^7 + 1\,792x^6 + 1\,792x^5 + 1\,120x^4 + 448x^3 + 112x^2 + 16x + 1$

P. Ak podobne postupujeme s nepárnou mocninou, pred zátvorkou sa objaví číslo -1. To znamená, že pred každým členom binomického rozvoja bude znamienko mínus.

koeficienty sú: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1
$\left(3x - \frac{4}{3}\right)^7 = 1.(3x)^7.\left(-\frac{4}{3}\right)^0 + 7.(3x)^6.\left(-\frac{4}{3}\right)^1 + 21.(3x)^5.\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 35.(3x)^4.\left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 35.(3x)^3.\left(-\frac{4}{3}\right)^4 +$
$+ 21.(3x)^2.\left(-\frac{4}{3}\right)^5 + 7.(3x)^1.\left(-\frac{4}{3}\right)^6 + 1.(3x)^0.\left(-\frac{4}{3}\right)^7 = 2\,187x^7 + 7.729x^6.\left(-\frac{4}{3}\right) + 21.243x^5.\frac{16}{9} +$
$+ 35.81x^4.\left(-\frac{64}{27}\right) + 35.27x^3.\frac{256}{81} + 21.9x^2.\left(-\frac{1024}{243}\right) + 7.3x.\frac{4096}{729} - \frac{16384}{2187} =$
$= 2\,187x^7 – 6\,804x^6 + 9\,072x^5 – 6\,720x^4 + \frac{8960}{3}x^3 - \frac{7168}{9}x^2 + \frac{28672}{243}x - \frac{16384}{2187}$

koeficienty sú: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
$\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{9}{4x}\right)^6 = 1.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^6.\left(\frac{9}{4x}\right)^0 + 6.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^5.\left(\frac{9}{4x}\right)^1 + 15.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^4.\left(\frac{9}{4x}\right)^2 + 20.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^3.\left(\frac{9}{4x}\right)^3 +$
$+ 15.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^2.\left(\frac{9}{4x}\right)^4 + 6.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^1.\left(\frac{9}{4x}\right)^5 + 1.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^0.\left(\frac{9}{4x}\right)^6 = \frac{64x^{12}}{729} + 6.\frac{32x^{10}}{243}.\frac{9}{4x} + 15.\frac{16x^8}{81}.\frac{81}{16x^2} +$
$+ 20.\frac{8x^8}{27}.\frac{729}{64x^3} + 15.\frac{4x^4}{9}.\frac{6561}{256x^4} + 6.\frac{2x^2}{3}.\frac{59049}{1024x^5} + \frac{531441}{4096x^6} =$
$= \frac{64x^{12}}{729} + \frac{16x^9}{9} + 15x^6 + \frac{135x^3}{2} + \frac{10935}{64} + \frac{59049}{256x^3} + \frac{531441}{4096x^6}$

Určte ôsmy člen rozvoja výrazu $(4x^3 – 3)^{11}$.

$a_8 = \binom{11}{8-1}(4x^3)^{11-8+1}.(-3)^{8-1} = \binom{11}{7}(4x^3)^4.(-3)^7 = 330.256x^{12}.(-2\,187) = -184\,757\,760x^{12}$

Koľký člen rozvoja výrazu $\left(\frac{2x^2}{3} + \frac{9}{4x}\right)^{12}$ neobsahuje x?

$a_k = \binom{12}{k-1}.\left(\frac{2x^2}{3}\right)^{13-k}.\left(\frac{9}{4x}\right)^{k-1} = \binom{12}{k-1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{13-k}.\left(\frac{9}{4}\right)^{k-1}(x^2)^{13-k}.\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} =$
prvé tri činitele sú iba čísla – iba posledné dva sú mocniny x
$= K.\frac{(x^2)^{13-k}}{x^{k-1}}$
ten súčin (podiel) mocnín x sa musí rovnať 1

$1 = \frac{(x^2)^{13-k}}{x^{k-1}}$ $\quad /.x^{k-1}$
$x^{k-1} = (x^2)^{13-k}$
$x^{k-1} = x^{26-2k}$
$k – 1 = 26 – 2k$ $\quad /+2k + 1$
$3k = 27$ $\quad /:3$

$k = 9$

Koľký člen rozvoja výrazu $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{x}\right)^{15}$ obsahuje x^{-3}?

$a_k = \binom{15}{k-1} . \left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k} . \left(-\frac{2}{x}\right)^{k-1} = \binom{15}{k-1} . (-2)^{k-1} \left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k} . \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} =$

prvé dva činitele sú iba čísla – posledné dva sú mocniny x

$= K . \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k}}{x^{k-1}}$

$x^{-3} = \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k}}{x^{k-1}}$ $\quad /.x^{k-1}$

$x^{-3} . x^{k-1} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k}$

$x^{k-4} = x^{\frac{16-k}{3}}$

$k - 4 = \frac{16-k}{3}$ $\quad /.3$

$3k - 12 = 16 - k$ $\quad /+k + 12$

$4k = 28$ $\quad /:4$

$k = 7$

Pre aké x sa v rozvoji výrazu $\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2x}\right)^{9}$ štvrtý člen rovná 3?

$a_4 = \binom{9}{3} . \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{6} . \left(\frac{1}{2x}\right)^{3} = 84 . x^4 . \frac{1}{8x^3} = \frac{21x}{2}$

$3 = \frac{21x}{2}$ $\quad /.\frac{2}{21}$

$\frac{2}{7} = x$