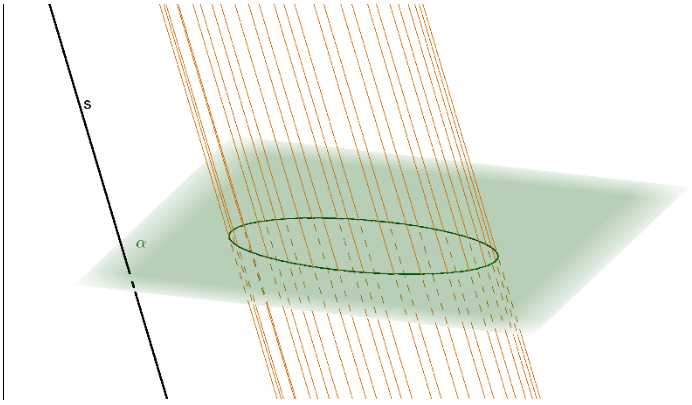
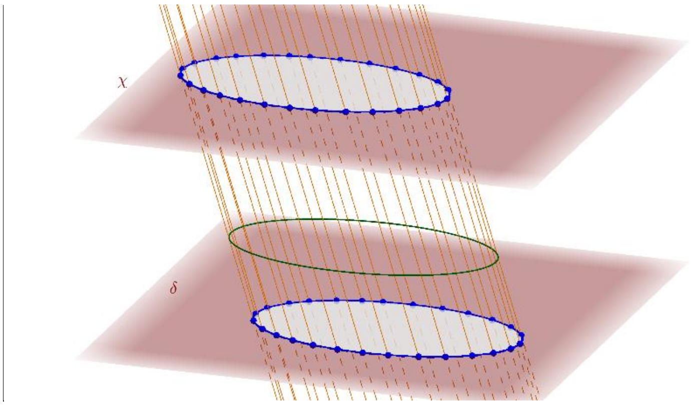
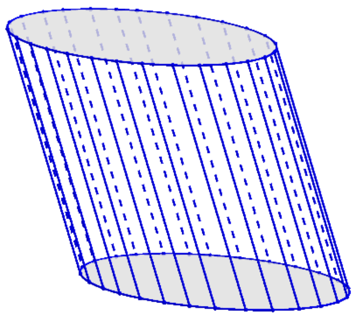
Povrch a objem valca

D. Daný je krivkami ohraničený rovinný útvar (***riadiaci*** alebo ***určujúci útvar***) a priamka, ktorá nie je rovnobežná s rovinou útvaru. Ak hraničnými bodmi útvaru vedieme priamky rovnobežné s danou priamkou, vznikne nekonečná valcová plocha – nekonečný valec. Ak teraz zoberieme dve rovnobežné roviny, ktoré prechádzajú valcovou plochou, vznikne ***valec***, ako časť nekonečnej valcovej plochy medzi rovnobežnými rovinami (spoločná časť valcovej plochy s vrstvou).



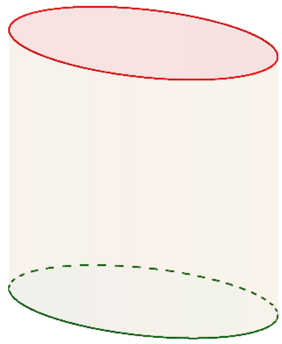




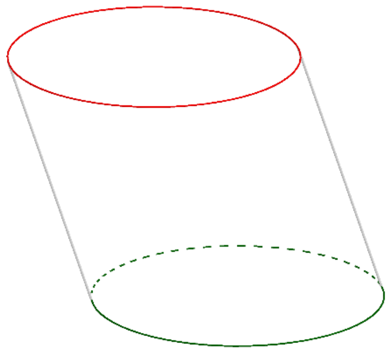
podstavy (dolná a horná) – dva rovnobežné, zhodné krivkami ohraničené rovinné útvary (zhodné aj s určujúcim útvarom)
výška telesa: v – vzdialenosť podstáv
strany valca – spojnice hraničných bodov dolnej a hornej podstavy rovnobežné s danou priamkou
plášť valca – súhrn strán valca

kolmý valec – strany sú kolmé na podstavy

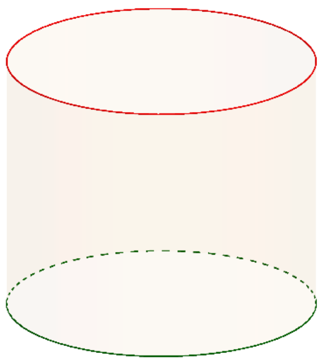
⇒ plášť valca po rozvinutí je obdĺžnik: jeden rozmer je obvod podstavy a druhý je výška telesa
⇒ výška telesa je rovnaká, ako dĺžka strán



kosý (***šikmý***) ***valec*** – ak valec nie je kolmý (strany zvierajú s podstavami iný uhol ako pravý)



rotačný valec – kolmý valec s kruhovou podstavou



P. Rotačné teleso vznikne rotáciou rovinného útvaru okolo priamky (osi). Rotačný valec dostaneme rotáciou obdĺžnika okolo jednej strany.

všeobecný valec:

$S = 2S_p + S_{pl}$

$V = S_p.v$

rotačný valec:

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v)$

$V = \pi r^2 v$

príklad:

Daný je rotačný valec:

a, $r = 16$; $v = 17$; vypočítajte S, V

b, $S_{pl} = 900$; $v = 14$; vypočítajte S, V

c, $V = 1\,988$; $r = 9$; vypočítajte v, S

d, $S = 4\,000$; $v = 21$; vypočítajte r, V

a, $S_p = \pi r^2 = \pi.16^2 = 256\pi$

$S_p = 804{,}248$

$S_{pl} = 2\pi r v = 2\pi.16.17 = 544\pi$

$S_{pl} = 1\,709{,}026$

$S = 2S_p + S_{pl} = 2.804{,}248 + 1\ 709{,}026 = 1\ 056\pi$

$S = 3\ 317{,}522$

$V = S_p.v = 804{,}248.17 = 4\ 352\pi$

$V = 13\ 672{,}21$

---

b, $S_{pl} = 2\pi rv \quad \rightarrow \quad r = \frac{S_{pl}}{2\pi v} = \frac{900}{2\pi.14}$

$r = 10{,}231$

$S_p = \pi r^2 = \pi.10{,}231^2$

$S_p = 328{,}866$

$S = 2S_p + S_{pl} = 2.328{,}866 + 900$

$S = 1\ 557{,}732$

$V = S_p.v = 328{,}866.14$

$V = 4\ 604{,}125$

---

c, $V = \pi r^2 v \quad \rightarrow \quad v = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{1\ 988}{\pi.9^2}$

$v = 7{,}812$

$S = 2\pi r^2 + 2\pi rv = 2\pi.9^2 + 2\pi.9.7{,}812 = 508{,}938 + 441{,}778$

$S = 950{,}716$

---

d, $S = 2\pi r^2 + 2\pi rv$

$4\ 000 = 2\pi r^2 + 2\pi r.21 \qquad /:(2\pi)$

$636{,}620 = r^2 + 21r \qquad /-636{,}620$

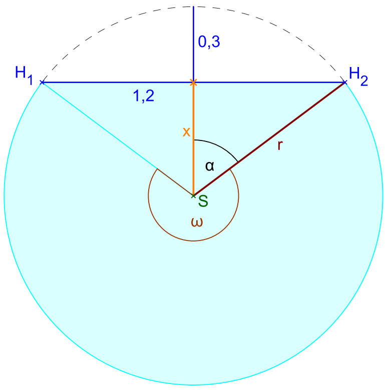
$0 = r^2 + 21r - 636{,}620$

$$r_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-21\pm\sqrt{21^2-4.1.(-636{,}620)}}{2.1} = \frac{-21\pm\sqrt{441+2\ 546{,}48}}{2} = \frac{-21\pm 54{,}66}{2} = \begin{matrix} \nearrow 16{,}829 \\ \searrow -37{,}829 \end{matrix}$$

$V = \pi r^2 v = \pi 16{,}829^2.21$

$V = 18\ 684{,}50$

Koľko vody je vo vodorovnej valcovej nádrži v tvare rotačného valca s výškou dĺžky 8 *m*, keď šírka hladiny je 1,2 *m* a hladina je 30 *cm* pod hornou stranou valca (pozri obrázok)?



môžeme využiť Pytagorovu vetu

$r^2 = 0{,}6^2 + x^2$

$r^2 = 0{,}6^2 + (r - 0{,}3)^2$

$r^2 = 0{,}36 + r^2 - 0{,}6r + 0{,}09 \qquad /-r^2$

$0 = 0{,}45 - 0{,}6r \qquad /+0{,}6r$

$0{,}6r = 0{,}45 \qquad /:0{,}4$

$r = 0{,}75\ m$

$\sin\alpha = \frac{0{,}6}{r} = \frac{0{,}6}{0{,}75} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \quad \rightarrow \quad \alpha = \sin^{-1} 0{,}8 = 59°2'0''$

$\omega = 360° - 2\alpha = 360° - 118°4'1'' = 241°55'59''$

vypočítali sme stredový uhol, pomocou ktorého môžeme vypočítať obsah kruhového odseku, čo je podstavou valca

$S_p = \frac{\pi r^2}{360°} . \omega - \frac{1}{2} r^2 . \sin\omega = \frac{\pi . 0{,}75^2}{360°} . 241°55'59" - \frac{1}{2} . 0{,}75^2 . \sin 241°55'59" = 1{,}187\,6 + 0{,}172\,1$

$S_p = 1{,}359\,7\ m^2$

$V = S_p . v = 1{,}359\,7 . 8$

$V = 10{,}878\ m^3$

Záhradná hadica s priemerom 19,05 *mm* s dĺžkou 20 *m* má celkovú hmotnosť 2,592 5 *kg* a hustotu 1 210 $\frac{kg}{m^3}$. Aká je hrúbka steny hadice?

$h < 0{,}952\,5$

$r_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{19{,}05}{2} = 9{,}525\ mm = 0{,}952\,5\ cm$

$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{2{,}592\,5}{1\,210} = 0{,}001\,134\,132\ m^3 = 2\,142{,}562\ cm^3$

$V = V_1 - V_2 = \pi r_1^2 v - \pi r_2^2 v = \pi r_1^2 v - \pi(r_1 - h)^2 v = \pi r_1^2 v - \pi(r_1^2 - 2r_1 h + h^2)v =$

$= \pi r_1^2 v - \pi r_1^2 v + \pi 2 r_1 h v - \pi h^2 v$

$V = 2\pi r_1 h v - \pi h^2 v$

$2\,142{,}562 = 2\pi . 0{,}952\,5 . h . 2\,000 - \pi . h^2 . 2\,000 \quad /:(2\,000\pi)$

$0{,}341\,00 = 1{,}905h - h^2 \quad /-0{,}179\,94$

$0 = -h^2 + 1{,}905h - 0{,}341\,00$

$h_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1{,}905 \pm \sqrt{1{,}905^2 - 4.(-1).(-0{,}341\,00)}}{2.(-1)} = \frac{-1{,}905 \pm \sqrt{3{,}629 - 1{,}364\,00}}{-2} = \frac{-1{,}905 \pm 1{,}505\,00}{-2}$

$= \begin{cases} \nearrow 0{,}200\,00 \\ \searrow 1{,}705\,00 \end{cases}$