Vzdialenosť bodov

Analytická geometria skúma geometrické útvary analytickou metódou. Čiže geometrické objekty (body, priamky, kvadratické útvary – kužeľosečky, roviny) snaží vyjadriť číslami (súradnice), rovnicami, nerovnicami a sústavami rovníc a nerovníc. Útvary sú umiestnené do súradnicovej sústavy (my pracujeme iba v rovine). Namiesto konštrukcie dosadzujeme čísla do výrazov, rovníc, nerovníc; riešime lineárne rovnice a nerovnice, kvadratické rovnice, …

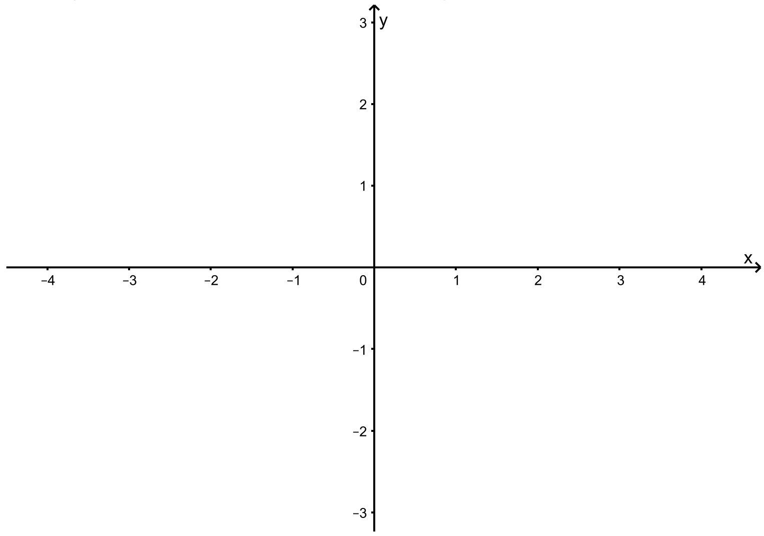
V. Ak bod leží na nejakom útvare (priamke, kružnici, elipse, …) a ten útvar je daný rovnicou (alebo sústavou), potom ak dosadíme súradnice bodu do rovnice (rovníc sústavy), platí rovnosť.

V rovine potrebujeme súradnicovú sústavu:

dve kolmé priamky + rovnaké jednotky na osiach (*karteziánska sústava súradníc*)

potom v takejto sústave každý bod má dve súradnice:

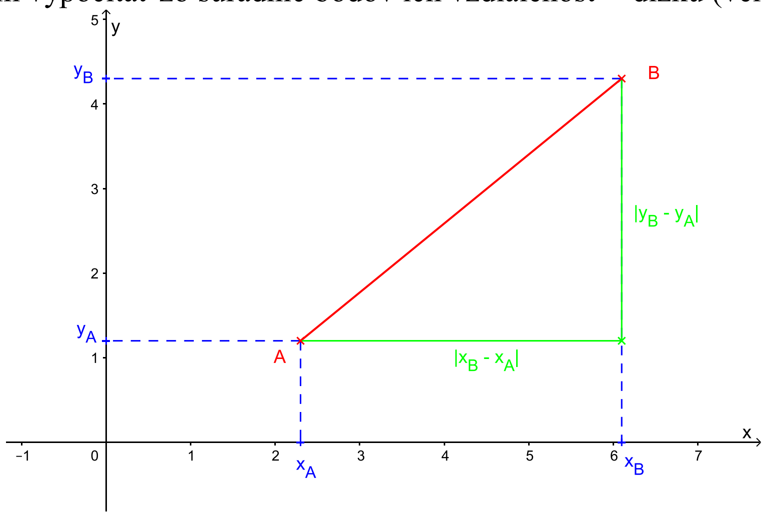
prvú x-ovú a druhú y-ovú: $C(c_1; c_2)$ alebo $C(x_C; y_C)$ resp. $C[c_1; c_2]$ alebo $C[x_C; y_C]$



Dané sú body A a B tým, že poznáme ich súradnice

$A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$

chceme nejakým spôsobom vypočítať zo súradníc bodov ich vzdialenosť – dĺžku (veľkosť) úsečky



Na obrázku vidíme pravouhlý trojuholník, v ktorom prepona je vlastne úsečka AB – jej veľkosť potrebujeme zistiť.

Dĺžku vodorovnej odvesny dostaneme ako rozdiel x-ových súradníc bodov. Preto je ten rozdiel v absolútnej hodnote, lebo bod B môže byť aj naľavo od bodu A (bod naľavo má menšiu x-ovú súradnicu: čiže z menšieho čísla by sme odčítali väčšie) a potom ten rozdiel vychádza na záporné číslo. Lenže vzdialenosti meriavame nezápornými číslami (kladnými a nulou). Absolútna hodnota nám zabezpečí nezápornosť rozdielu.

Dĺžka zvislej odvesny je zase rozdiel y-ových súradníc (takisto v absolútnej hodnote).

V pravouhlom trojuholníku platí Pytagorova veta – aj tu ju môžeme využiť. Trošku ju upravíme a tým dostaneme samotný vzorec na výpočet vzdialenosti bodov v rovine.

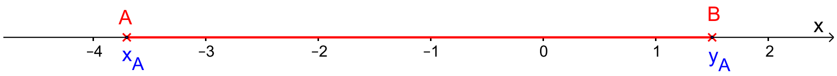
$$|AB|^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2$$

Nakoľko druhá mocnina opačných čísel sa rovná [$7^2 = (-7)^2$], absolútna hodnota (ktorá urobí zo záporných čísel opačné, kladné číslo) je zbytočná → môžeme ju nahradiť obyčajnou zátvorkou. Ešte odmocníme a vzorec je hotový.

V. $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

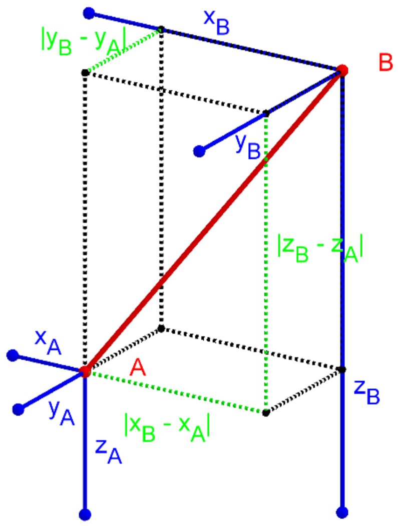
P. Ak pracujeme na číselnej osi (x-ová os) – *jednorozmerný pracovný priestor*, kde každý bod má iba jednu súradnicu: $C(x_C)$, potom vzorec na výpočet vzdialenosti bodov A a B dostane zjednodušený tvar: $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2}$. Čo vlastne môžeme písať v tvare:

$|AB| = |x_B - x_A|$



Zase ak rozšírime náš pracovný priestor na klasický trojrozmerný priestor, kde body majú už tri súradnice: $C(x_C; y_C; z_C)$, potom vzdialenosť bodov je vlastne výpočet telesovej uhlopriečky kvádra. Dĺžky hrán toho kvádra sú kladné rozdiely (absolútne hodnoty) jednotlivých súradníc. Dvojnásobným použitím Pytagorovej vety – raz na výpočet stenovej uhlopriečky podstavy z dvoch hrán (a a b); potom na výpočet samotnej telesovej uhlopriečky zo stenovej uhlopriečky a tretieho rozmeru (c).

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$



príklad:

Určte vzdialenosť bodov:

a, A(7; 11); B(13; 12) b, C(-3; -2); D(-7; -9) c, E(4; -5); F(-5; 4)

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(13-7)^2 + (12-11)^2} = \sqrt{6^2 + 1^2}$

$|AB| = \sqrt{37} = 6{,}082$

$|CD| = \sqrt{\left(-7-(-3)\right)^2 + \left(-9-(-2)\right)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2}$

$|CD| = \sqrt{65} = 8{,}062$

$|EF| = \sqrt{(-5-4)^2 + \left(4-(-5)\right)^2} = \sqrt{(-9)^2 + 9^2}$

$|EF| = \sqrt{162} = 12{,}728$

Daný je trojuholník ABC vrcholmi: A(-2; -1); B(8; 3); C(4; 7). Vypočítajte jeho obvod.

a = |BC| = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$ = $\sqrt{(4-8)^2 + (7-3)^2}$ = $\sqrt{(-4)^2 + 4^2}$ = $\sqrt{32} = 5{,}657$

b = |AC| = $\sqrt{\left(4-(-2)\right)^2 + \left(7-(-1)\right)^2}$ = $\sqrt{6^2 + 8^2}$ = $\sqrt{100} = 10$

c = |AB| = $\sqrt{\left(8-(-2)\right)^2 + \left(3-(-1)\right)^2}$ = $\sqrt{10^2 + 4^2}$ = $\sqrt{116} = 10{,}770$

o = a + b + c = 5,657 + 10 + 10,770
o = 26,427

Daný je trojuholník ABC vrcholmi: A(10; 1); B(3; 4); C(8; y_C). Určte chýbajúcu súradnicu bodu C aby trojuholník ABC bol pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole C.

$c^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (3 - 10)^2 + (4 - 1)^2 = (-7)^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58$
$a^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (8 - 3)^2 + (y_C - 4)^2 = 5^2 + (y_C - 4)^2 = 25 + (y_C - 4)^2$
$b^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (8 - 10)^2 + (y_C - 1)^2 = (-2)^2 + (y_C - 1)^2 = 4 + (y_C - 1)^2$

$c^2 = a^2 + b^2$
$58 = 25 + (y_C - 4)^2 + 4 + (y_C - 1)^2$
$58 = 25 + y_C^2 - 8y_C + 16 + 4 + y_C^2 - 2y_C + 1$
$58 = 2y_C^2 - 10y_C + 46$
$0 = 2y_C^2 - 10y_C - 12$
$0 = y_C^2 - 5y_C - 6$
$0 = (y_C + 1)(y_C - 6)$

$y_C + 1 = 0$ | $y_C - 6 = 0$
$y_{C1} = -1$ | $y_{C2} = 6$