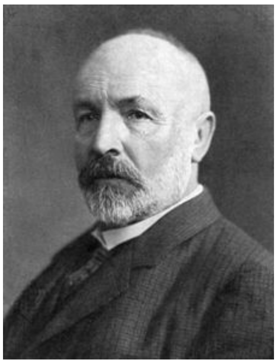
Množina a jej určenie, konečná a nekonečná množina

Pojem množina je jeden zo <u>základných pojmov modernej matematiky</u>.
Pojem množiny <u>nemožno definovať klasickým spôsobom</u>.

<u>**Približne**</u> možno povedať, že množina je ***súbor*** (súhrn, skupina) predmetov, ľudí, čísel, atď. – *vecí* - ***objektov*** dobre rozlíšiteľných našou mysľou alebo intuíciou, pričom tento súbor chápeme ako nový objekt nášho myslenia. <u>(Georg Cantor 1845 – 1918, nemecký matematik a logik, ***zakladateľ*** ***teórie množín.***</u>):

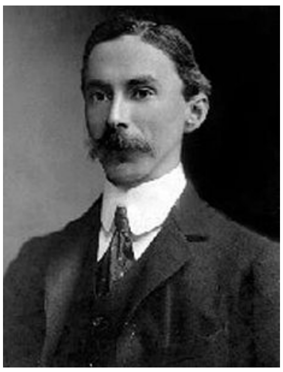


Russellov paradox alebo **Russellova antinómia:**
Označme S množinu všetkých množín, ktoré nie sú svojím vlastným prvkom (tj. množín, ktoré neobsahujú samých seba).

$$S = \{X | X \notin X\}$$

Táto množina je v Cantorovom systému dobre definovaná, tzn. teraz by malo byť pre ľubovoľnú množinu M možno rozhodnúť, či táto množina M je alebo nie je prvkom množiny S. Toto však sa nedá rozhodnúť v prípade samotnej množiny S. Obe možnosti totiž vedú k sporu s ich definíciou. (Ak S nie je svojim vlastným prvkom, mala by podľa definície do S patriť; ak však S je svojim vlastným prvkom, potom podľa definície do S by patriť nemala.)
Z pohľadu matematiky ide o to, že ***nemôže existovať množina, ktorej prvkami by boli všetky množiny, ktoré nie sú prvkami samej seba***.

Bertrand Russel (1872 – 1970) – anglický filozof a matematik:



Paradox holiča:
V malom meste je jediný holič, ktorý holí ***práve tých mužov v meste, ktorí <u>sa neholia sami</u>***.
Také mesto (množina) však nemôže existovať, lebo tu opäť dochádza ku sporu:

<u>*Holí holič sám seba?*</u> <u>**Sám seba má holiť práve vtedy, kedy sám seba holiť nebude**</u>.
Napr. množina všetkých prirodzených čísel, množina všetkých celých čísel menších ako 7, množina všetkých žiakov vašej školy nosiacich okuliare, ...

<u>Množiny sa väčšinou označujú</u> veľkými písmenami, napr. **A, B, N** a ich obsah (objekty) sa zapisujú do ***zložených zátvoriek***.

Napr. množinu A obsahujúcu práve dva objekty *a*, *b* zapíšeme ***A = {a, b}***.

Objekty, ktoré patria do danej množiny nazývame <u>prvky</u> množiny.
<u>Obvykle ich označujeme</u> malými písmenami ***x, y, c, ...***

Množinu môžeme považovať za určenú jedine vtedy, ak o každom objekte vieme <u>jednoznačne povedať</u>, či do danej množiny patrí alebo nie.

Príklad:
<u>Pozorne si prečítajte nasledovné vety.</u>
Prvky množiny A ***<u>sú</u>*** čísla 2, 3, 4.
Prvky množiny A ***<u>sú práve</u>*** čísla 2, 3, 4.
Môžeme v oboch prípadoch hovoriť, že **množina A je jednoznačne určená**?
Nie.
Pýtate sa prečo?
V prvom prípade hovoríme, že „*Prvky množiny A sú čísla 2, 3, 4.*“ Ale ... čo ak množina A = {1,2,3,4,5} alebo {1,2,3,4,5,7} alebo {2,3,4,5,...} alebo ... stále platí, že *prvkami množiny A sú čísla 2, 3, 4*, čiže v tomto prípade **množina A nie je jednoznačne určená**.
V druhom prípade sme použili slovíčko **práve**, ktoré spôsobilo, že do množiny A patria práve a jedine čísla 2, 3, 4, čiže množina je jednoznačne určená.

Ak chceme vyjadriť, že ***prvok x je prvkom množiny M***, tak zapíšeme ***x* ∈ M** a čítame: **x je prvkom množiny M** alebo ***x patrí množine M***.

Ak **d nie je prvkom množiny B**, tak zapíšeme ***d* ∉ B**.

<u>Každá množina je **určená** buď</u>

vymenovaním všetkých jej prvkov: B = {*a*, *b*, *c*, *d*}, alebo
určením charakteristických vlastností prvkov, ktoré do danej množiny patria.

Napr.: ***B = {x∈Z; 3 | x}*** je zápis množiny B, ktorej prvky sú celé čísla deliteľné číslom 3.
Množina, ktorá ***neobsahuje žiadny prvok*** , sa nazýva <u>**prázdna množina**</u> .

Jej obsah sa vyjadruje znakom ∅ alebo **{}**, v ***žiadnom prípade však nie*** **{∅}.**

Napr.: ***množina všetkých prirodzených čísel <u>menších</u> ako nula***.

Množiny ***obsahujúce aspoň jeden prvok*** nazývame **neprázdne množiny** .
Každú množinu, ktorá obsahuje ***konečný počet prvkov*** nazývame **konečnou množinou** .
Konečný počet prvkov je daný prirodzených číslom resp. nulou, čiže i ***prázdna množina je konečnou množinou***.
Napr.: množina všetkých prirodzených čísel menších ako 7; množina všetkých celých čísel, ktorých druhá mocnina je rovná 25; ...
Množinu, ***ktorá nie je konečná,*** nazývame **nekonečnou množinou** .
Napr.: množina všetkých prirodzených čísel väčších ako 18; množina všetkých celých čísel, ktorých tretia mocnina je väčšia ako 49; ...

Príklad 1:
Určte množinu **A** ***všetkých celých čísel***, ktoré sú ***väčšie ako –2 a menšie než 3***
a) vymenovaním prvkov
b) charakteristickou vlastnosťou.
Riešenie:
a) Väčšie ako -2 a menšie ako 3 sú celé čísla -1, 0, 1, 2 .
Teda množinu A zapíšeme: **A = {-1, 0, 1, 2}**
b) Charakteristickou vlastnosťou danú množinu zapíšeme nasledovne: **A = {$x\in Z$; $-2<x<3$}**

Príklad 2:
Určte množinu **B** ***všetkých prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné číslom 3 a zároveň sú menšie než 13***
a) vymenovaním prvkov
b) charakteristickou vlastnosťou.
Riešenie:
a) Deliteľné číslom 3 a zároveň menšie než 13 sú prirodzené čísla 3, 6, 9, 12 .
Teda množinu B zapíšeme: **B = {3, 6, 9, 12}**
b) Charakteristickou vlastnosťou danú množinu zapíšeme nasledovne: **B = {$x\in N$; $3|x \wedge x<13$}**

Úlohy:

1/ Vymenujte ***všetky prvky*** nasledujúcich množín:

$A = \{x \in N; x \leq 5\}$, $B = \{x \in Z; -5 \leq x < 5\}$, $C = \{x \in Q; 3x+1 = x+5\}$, $D = \{x \in N; x^2 < 10\}$,
$E = \{x \in Z; -2 < x \leq 2\}$, $F = \{x \in Q; 3x = 5\}$, $G = \{x \in Z; 3x = 5\}$, $H = \{x \in N; {}^{2}| x \wedge x < 16\}$

Vzťahy medzi množinami, operácie s množinami

Rovnosť množín:

Množiny A* a *B sa* rovnajú**, keď ***každý prvok množiny A patrí množine B a ***každý prvok množiny B patrí množine A.***
Zapisujeme: **A = B**

$$\mathbf{A = B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B)}$$

Rovnosť množín je:

- reflexívna: A = A
- symetrická: A = B ⇒ B = A
- tranzitívna: (A = B ∧ B = C) ⇒ A = C

Príklad 1:
Zistite či sa rovnajú množiny ***A = {2; 4; 6; 8}*** a ***B = {x∈Z⁺; 2|x ∧ x<10}***.

Riešenie:
Množina A je zapísaná vymenovaním prvkov a množina B charakteristickou vlastnosťou. Zapíšeme i množinu B vymenovaním prvkov. Označenie množiny Z^+ predstavuje kladné celé čísla, pre ktoré platí 2|x (sú deliteľné dvomi) ∧ (a zároveň) x<10 (sú menšie ako 10).
Obe podmienky spĺňajú len čísla 2, 4, 6, 8 , teda množinu B môžeme zapísať vymenovaním prvkov nasledovne: B = {2; 4; 6; 8}. Vidíme, že množiny A a B ***obsahujú tie isté prvky*** a teda ***sa rovnajú*** .

Inklúzia množín:

Množina A je* podmnožinou *množiny B práve vtedy, ak ***všetky prvky množiny A patria zároveň aj množine B.***
Zapisujeme: **A ⊂ B**

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Vlastnosti inklúzie množín:

- reflexívnosť: A ⊂ A
- tranzitívnosť: (A ⊂ B ∧ B ⊂ C) ⇒ A ⊂ C
- prázdna množina ***∅ je podmnožinou každej množiny***

Príklad 2:

Zistite či množina ***C = {3; 4; 5}*** je ***podmnožinou*** množiny ***B = {x∈Z; -3<x≤5}***.

Riešenie:

Množinu B zapíšeme vymenovaním prvkov nasledovne: ***B={-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5}***

Všetky prvky množiny C patria aj množine B (sú prvkami aj množiny B),
preto ***množina C podmnožinou množiny B***.

Príklad 3:

Napíšte všetky podmnožiny týchto množín:

A = ∅ :	*∅*	... ***počet = 1*** *alebo* 2^0
B = {1} :	*∅, {1}*	... ***počet = 2*** *alebo* 2^1
C = {1; 2} :	*∅, {1}, {2}, {1; 2}*	... ***počet = 4*** *alebo* 2^2
D = {1; 2; 3} :	*∅, {1}, {2}, {3}, {1; 2}, {1; 3}, {2; 3}, {1; 2; 3}*	... ***počet = 8*** *alebo* 2^3
E = {1; 2; 3; 4} :	*∅, {1}, {2}, {3}, {4}, {1; 2}, {1; 3}, {1; 4}, {2; 3}, {2; 4}, {3; 4}, {1; 2; 3}, {1; 2; 4}, {1; 3; 4}, {2; 3; 4}, {1; 2; 3; 4}*	... ***počet = 16*** *alebo* 2^4

Vo všeobecnosti platí, že ***n - prvková množina má*** 2^n ***podmnožín***.

Príklad 4:

Čo môžeme povedať o množinách A = {a; b; c}, B = {b; a; c} z pohľadu rovnosti množín a ich inklúzie ?

Riešenie: ***A = B*** alebo ***A ⊂ B*** a zároveň ***B ⊂ A***

Z definície rovnosti množín a podmnožiny vidíme, že

$$(A = B) \Leftrightarrow [(A \subset B) \wedge (B \subset A)]$$

t.j. ***množiny A, B sa rovnajú***, ak ***množina A je podmnožinou množiny B a zároveň množina B je podmnožinou množiny A***.

Na základe vzťahu $(A = B) \Leftrightarrow [(A \subset B) \wedge (B \subset A)]$ sa dokazuje rovnosť dvoch množín A, B tak, že dokážeme, že:

1. ***každý prvok z množiny A patrí do množiny B***,
2. ***každý prvok z množiny B patrí do množiny A***.

Zjednotenie množín:

Zjednotením množín A a ***B nazývame množinu A ∪ B, ktorá obsahuje prvky patriace aspoň do jednej z množín A, B***, teda obsahuje prvky, ktoré patria do množiny A alebo do množiny B a okrem nich neobsahuje žiadne iné prvky.

Zapisujeme: **A ∪ B**

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

Vlastnosti zjednotenia množín:

- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$ ... ***komutatívnosť*** *(... „nezáleží na poradí“)*
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ... ***asociatívnosť*** *(... „nezáleží na poradí“)*
- $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

Príklad 5:

Zapíšte prvky, ktoré patria ***zjednoteniu*** množín $E = \{x \in N; 2 \leq x < 6\}$, $F = \{x \in Z; x^2 = 9\}$.

Riešenie:

Množinu E zapíšeme vymenovaním prvkov nasledovne: $E = \{2; 3; 4; 5\}$

Množinu F zapíšeme vymenovaním prvkov nasledovne: $F = \{-3; 3\}$

Zjednotenie množín E, F zapíšeme: $\underline{E \cup F = \{-3; 2; 3; 4; 5\}}$

Prienik množín:

Prienikom množín A a ***B nazývame množinu A ∩ B, ktorá obsahuje <u>všetky</u> prvky patriace <u>súčasne</u> do oboch množín A, B.***

Zapisujeme: **A ∩ B**

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

Ak je ***prienikom množín A, B prázdna množina (*** $A \cap B = \emptyset$ ***)***,

nazývame ***množiny A, B*** ***disjunktnými*** (<u>nemajú žiadne spoločné prvky</u>).

Vlastnosti prieniku množín:

- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$ ... ***komutatívnosť*** *(... „nezáleží na poradí“)*
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ... ***asociatívnosť*** *(... „nezáleží na poradí“)*
- $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

Príklad 6:

Zapíšte prvky, ktoré patria ***prieniku*** množín G, H, kde ***G je množina všetkých nepárnych prirodzených čísel menších ako 10*** a $H = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$.

Riešenie:

Množinu G zapíšeme vymenovaním prvkov nasledovne: $G = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

Prienik množín G, H zapíšeme: **G ∩ H = {1; 3; 5; 7}**

Rozdiel množín:

***Rozdielom* množín A** a **B nazývame množinu A – B (A \ B),**
ktorá obsahuje tie prvky množiny A, ktoré súčasne nepatria do množiny B.

Zapisujeme: ***A – B***   alebo   ***A \ B***

$$x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$$

Vlastnosti rozdielu množín:

- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$
- $\emptyset - A = \emptyset$
- $(A - B) \subset A$
- ak $A \neq B$, tak $A - B \neq B - A$ ... ***operácia rozdielu nie je komutatívna***
- $A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$

Príklad 7:
Zapíšte prvky, ktoré patria rozdielu množín I, J, kde ***I je množina všetkých prirodzených čísel menších ako 100, ktorých odmocnina je prirodzené číslo väčšie ako 2*** a ***J = {4,5,6,7,8,9}***.

Riešenie:
Množinu I zapíšeme vymenovaním prvkov nasledovne: ***I ={9; 16; 25; 36; ... ; 81}***
Rozdiel množín I, J zapíšeme: ***I – J = {16; 25; 36; ... ; 81 }***

Úlohy:

1/ Dané sú množiny:

$A = \{1;2;3;4;5;6;7\}$ *a* $B = \{2;4;6;8;10;12\}$ *Zistite*
$A \cap B,\ A \cup B,\ A - B,\ B - A,$

2/ Dané sú množiny:

$A = \{0;2;4;5;7;8\},\ B = \{0;2;5;6;7;11;12\},\ C = \{2;4;5;6;10\}$
Zistite $A \cup B,\ (A \cup B) \cup C,\ (A \cup B) \cap C,\ A \cap C,\ A \cup C,\ (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$A - B,\ A \cap B \cap C,\ B - (A \cup C),\ (A \cap B) \cup (C \cap B),\ (A \cup C) - B,$
$(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C),\ (A - B) \cup C,$

3/ Dané sú množiny:

$A = \{x \in N;^2 | \, x \wedge x < 16\}, \; B = \{x \in N;^3 | \, x \wedge x < 16\}$

zistite $A \cap B,\ A \cup B,\ A - B,\ B - A,$

Doplnok (komplement) množiny:

Ak **A** $\subset$**B,** tak množinu $U - A = A'_U$ nazývame **Doplnok** ***(komplement) množiny A vzhľadom na množinu U.***

Množina A'_U je množina ***<u>všetkých prvkov množiny U</u>, ktoré nepatria do množiny A.***

(... ktoré „dopĺňajú“ množinu A na množinu U)

Zapisujeme: $A'_U = U - A$

$$x \in A'_U \Leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A)$$

<u>Vlastnosti rozdielu množín:</u>

- $A'_U = U - A$
- $A' \cap A = \emptyset$
- $A' \cup A = U$
- $(A')' = A$

<u>De Morganove pravidelá:</u>

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Príklad 8:

Dané sú množiny $K = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $L = \{-4,-3,5,6,7,11,12\}$, $M = \{2,3,4,5\}$. Určte $M'_{K \cup L}$.

<u>Riešenie:</u>

Zjednotenie množín K, L zapíšeme vymenovaním prvkov nasledovne:

$K \cup L = \{-4; -3; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 11; 12\}$

Doplnok množiny M na množine $K \cup L$ zapíšeme: $M'_{K \cup L} = \{-4; -3; 1; 6; 7; 8; 9; 11; 12\}$

Symetrický rozdiel množín:

***Symetrický rozdiel** množín A, B tvoria **všetky** prvky množín A, B,*
ktoré patria práve jednej z nich (patria do A alebo do B, nie však do A aj B).

Zapisujeme: $A \div B$

$$A \div B = (A-B) \cup (B-A)$$

Príklad 9:
Dané sú množiny: **A={2,3,5,7}, B={1,2,3,4}**.
Zapíšte prvky, ktoré patria do symetrického rozdielu množín A a B.

Riešenie:
A÷B={1,4,5,7} - „***vynecháme spoločné prvky***“ množín A a B

Niektoré vlastnosti základných operácií na množinách:

Operácia	**Popis, poznámky**
$A \subset A$	***Každá množina*** je súčasne ***podmnožinou samej seba***.
$\emptyset \subset A$	***Prázdna množina*** je ***podmnožinou každej ľubovoľnej množiny***.
$A \cup A = A$	Zjednotenie tých istých množín je tá istá množina (idempotentnosť).
$A \cup \emptyset = A$	Prázdna množina je neutrálny prvok vzhľadom na zjednotenie.
$A \cup B = B \cup A$	Operácia ***zjednotenie množín je komutatívna***.
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Operácia ***zjednotenie množín je asociatívna***.
$A \cap A = A$	Prienik tých istých množín je opäť tá istá množina (idempotentnosť).
$A \cap \emptyset = \emptyset$	Prienikom ***ľubovoľnej množiny s prázdnou množinou je prázdna mn***.
$A \cap B = B \cap A$	Operácia ***prienik množín je komutatívna***.
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Operácia ***prienik množín je asociatívna***.
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Distributívne zákony.
$(A')' = A$	Dvojitý doplnok.
$(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$	***De Morganove pravidlá***.
$A - B = A \cap B'$	

Princíp inklúzie a exklúzie

Počet prvkov ***konečnej množiny A*** označujeme **n(A)** alebo **|A|**.
Na výpočet počtu prvkov sa často používa ***princíp inklúzie*** (*zapojenia*) a ***exklúzie*** (*vypojenia*).

Pre 2 množiny: $\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

Pre ***disjunktné*** množiny platí: $\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B}$

Pre 3 množiny: $\mathbf{n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(B\cap C) + n(A\cap B\cap C)}$

Pre 4 množiny:
$$\mathbf{n(A\cup B\cup C\cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(A\cap D)}$$
$$\mathbf{- n(B\cap C) - n(B\cap D) - n(C\cap D) + n(A\cap B\cap C) + n(A\cap B\cap D)}$$
$$\mathbf{+ n(A\cap C\cap D) + n(B\cap C\cap D) - n(A\cap B\cap C\cap D)}$$

Úlohy:

1/ Na recepcii na vyslanectve každý ovláda aspoň jeden cudzí jazyk, 15 ľudí hovorí po anglicky, 12 po nemecky a 7 obidvoma jazykmi. Z koľkých ľudí sa skladá táto spoločnosť, ak v spoločnosti nikto iný jazyk neovláda?

2/ Z 35 žiakov odoberá denník SME 8 žiakov, Pravdu 10 žiakov, 21 žiakov neodoberá žiadne z týchto novín. Koľko žiakov odoberá obidvoje noviny.

3/ Za jeden deň opravili v autodielni na 46 autách 24 chýb na brzdách a 36 chýb na motore. Koľko áut malo chybu len na brzdách a koľko len na motore?

4/ Prieskum čitateľských záujmov ukázal, že 60% žiakov číta časopis A, 50% časopis B, 50% časopis C, 30% časopis A aj B, 20% časopis B aj C, 30% časopis A aj C a 10% všetky tri časopisy. Koľko % žiakov číta práve dva časopisy a koľko % nečíta ani jeden z týchto časopisov?

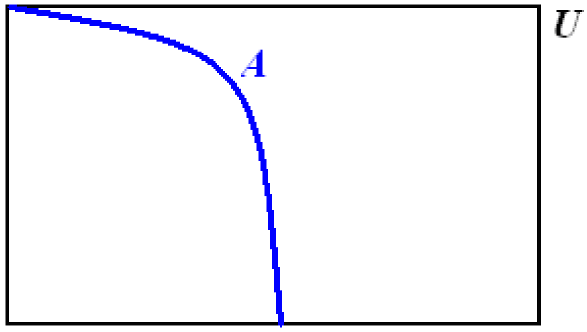
Grafické znázornenie množín, dôkazy množinových rovností

Na názornú predstavu ***množín, množinových vzťahov*** a ***operácií medzi množinami*** sa používajú ich grafické znázornenia v rovine, tzv. ***množinové diagramy***.

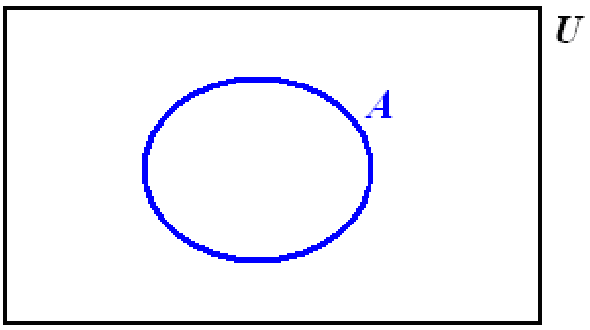
Základná množina U (alebo Z) sa znázorňuje spravidla ***obdĺžnikom*** a jej ***podmnožiny A, B, ...*** ako ***kruhy*** alebo iné ***zvyčajne oválne obrazce vnútri obdĺžnika***.

Tieto grafické znázornenia sa nazývajú ***Vennove diagramy***.
K znázorneniu ***množín reálnych čísel*** sa zvyčajne používa ***číselná os***.

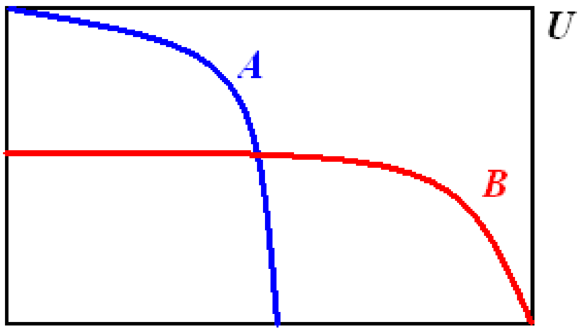
Vennov diagram pre <u>jednu</u> množinu A:



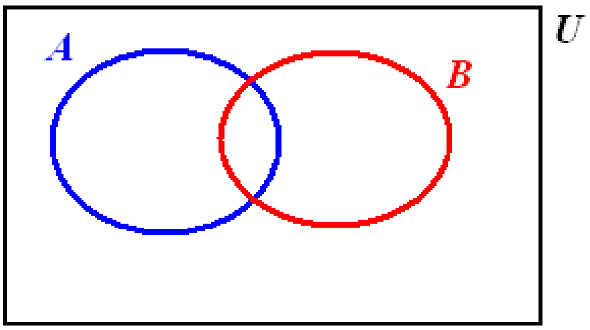
alebo



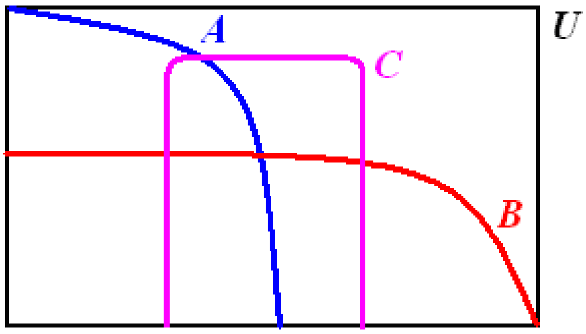
Vennov diagram pre <u>dve</u> množiny A a ***B:***



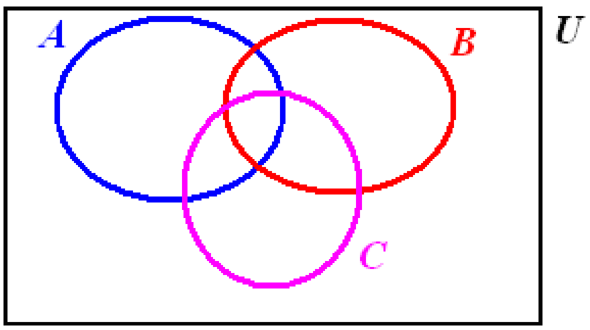
alebo



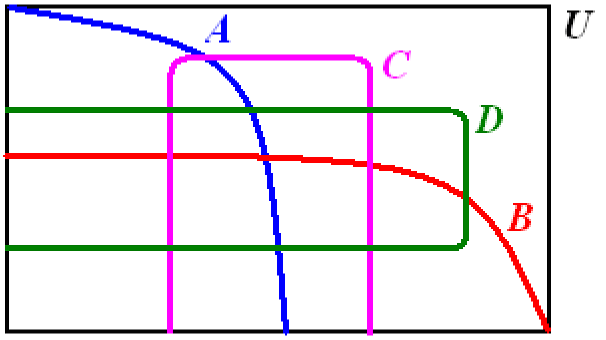
Vennov diagram pre <u>tri</u> množiny A, B a ***C:***



alebo



Vennov diagram pre <u>štyri</u> množiny A, B, C a D:



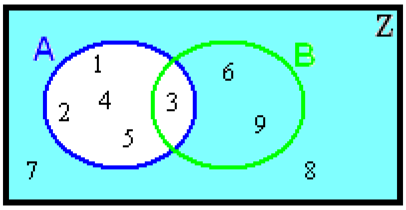
Príklad 1:

Daná je základná množina ***Z = {1,2,3,...,9}*** a jej podmnožiny ***A = {1,2,3,4,5}*** a ***B = {3,6,9}***.
Znázornite pomocou Vennovych diagramov a zapíšte vymenovaním prvkov nasledovné množiny:
a) doplnok množiny A vzhľadom k množine Z, t.j. $\mathbf{A'_Z}$
b) **A∪B ;** c) **A∩B** ; d) **A - B**

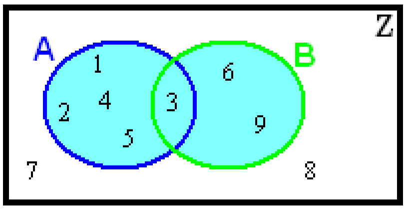
<u>Riešenie:</u>

a) Doplnok množiny A vzhľadom k množine Z tvoria všetky prvky patriace množine Z a zároveň nepatriace množine A, čiže:

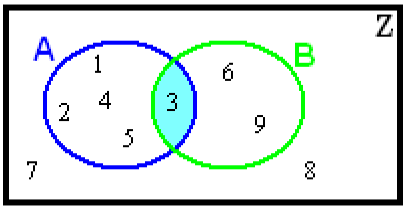
$\mathbf{A'_Z=\{6,7,8,9\}}$



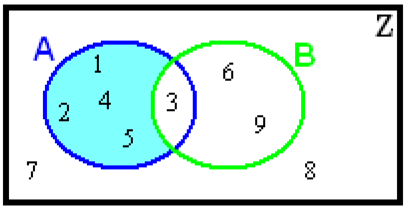
b) **A∪B={1.2.3.4.5.6.9}**



c) **A∩B={3}**



d) **A - B={1.2.4.5}**



Príklad 2:

Dané sú množiny **A**, **B**. Pomocou ***Vennovych diagramov*** zobrazte:

a) **A = B**

b) **A ⊂ B**

c) **A ∩ B**

d) **A ∪ B**

e) **A – B**

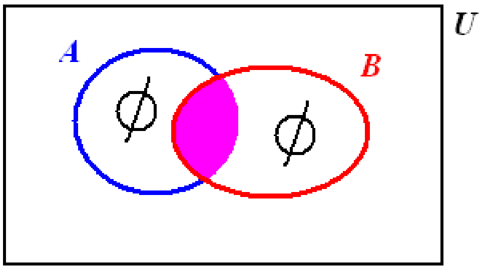
f) **A´$_{\mathbf{U}}$**

g) **A ÷ B**

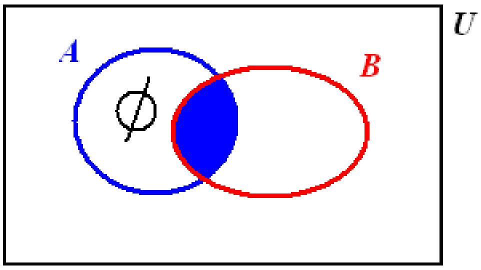
<u>Riešenie:</u>

Pri používaní Vennovych diagramov je dobré používať ***šrafovanie*** rôznymi farbami alebo v prípade ***prieniku dva rôzne smery*** a v prípade ***zjednotenia ten istý smer šrafovania***.

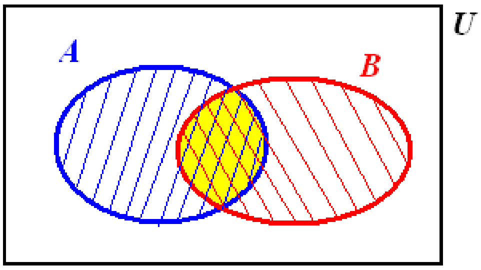
A = B :



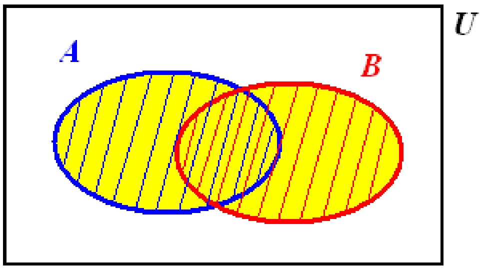
A ⊂ B :



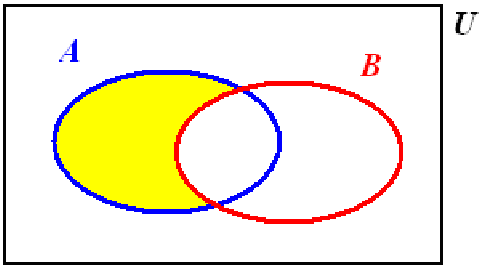
A ∩ B :



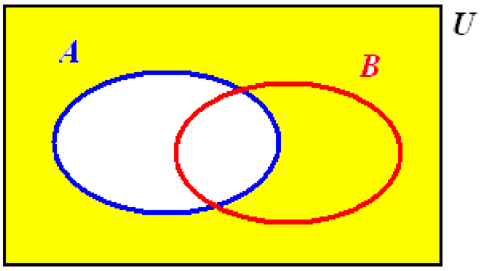
A ∪ B :



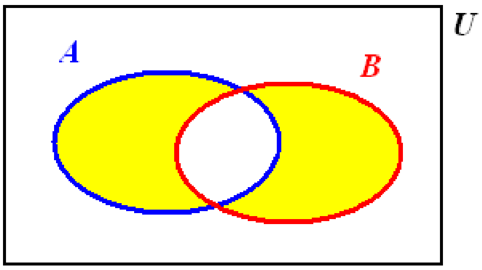
A – B :



A´$_{\mathbf{U}}$:



A ÷ B :

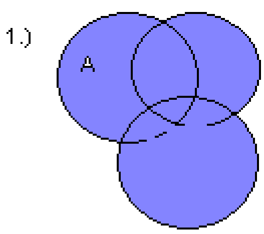


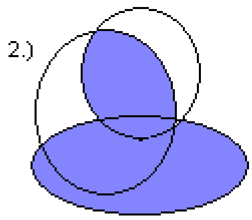
Príklad 3:

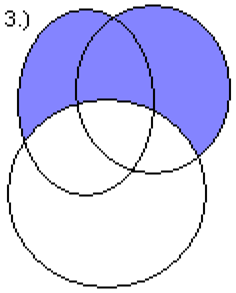
Pomocou Vennových diagramov znázornite množiny:

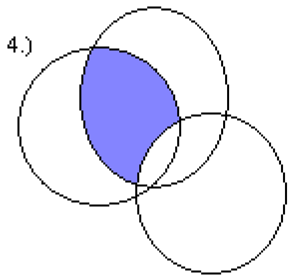
$(A \cup B) \cup C$ $(A \cap B) \cup C$ $(A \cup B) - C$ $(A \cap B) - C$

<u>Riešenie:</u>









Príklad 4:

Dané sú množiny **A**, **B**, **C**. Pomocou ***Vennovych diagramov zistite, či platia nasledovné rovnosti***:

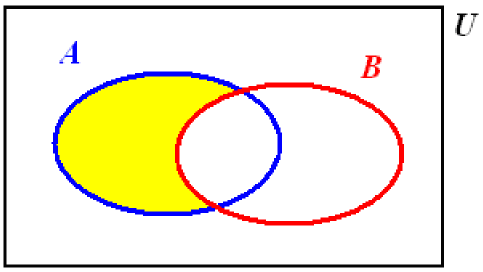
a) $\mathbf{A - B = A \cap B'}$

b) $\mathbf{(A \cup B)' = A' \cap B'}$

c) $\mathbf{(A - B) \cap C = (A \cap B) - C}$

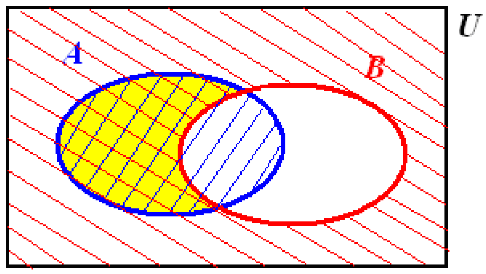
<u>Riešenie:</u>

A – B :

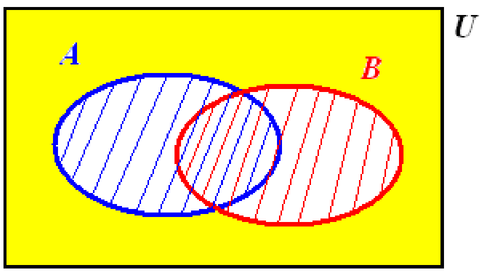


=

A ∩ B´ :

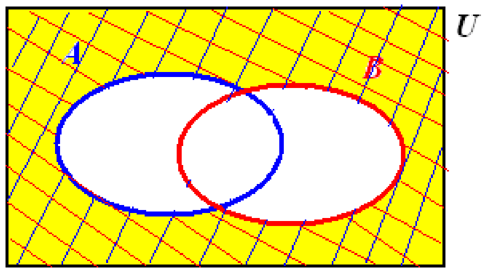


$(A \cup B)'$:

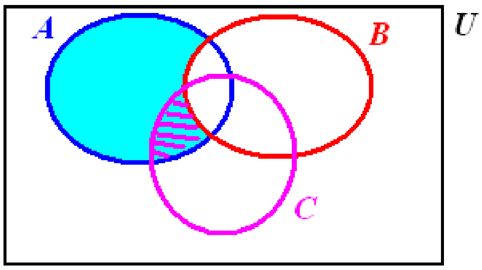


=

$A' \cap B'$:

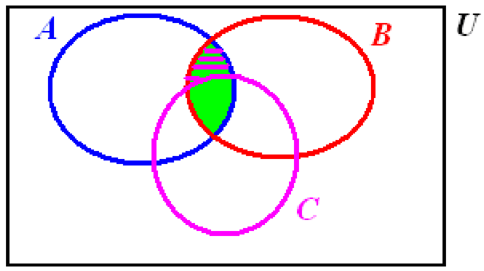


$(A - B) \cap C$:



≠

$(A \cap B) - C$:



Zapisovanie množiny reálnych čísel pomocou intervalov

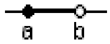
V článku *Množina a jej určenie, konečná a nekonečná množina* sme si hovorili o dvoch možnostiach zápisu množín - vymenovaním prvkov alebo určením charakteristických vlastností prvkov. Pozrime sa teraz spoločne na nasledovné dve zadania:

Príklad 1:
Dané sú dve množiny: **A** = $\{x \in N;\ 2 < x < 7\}$, **B** = $\{x \in R;\ 2 < x < 7\}$. Zapíšte tieto množiny vymenovaním prvkov.

Riešenie:
Množinu **A** viete určite všetci zapísať vymenovaním prvkov bez zaváhania. Teda ***A*** = ***{3; 4; 5; 6}***.
Čo ale spravíme s množinou **B**? Bude to tiež množina {3; 4; 5; 6}?
Určite nie, pretože by sme museli zapísať i číslo 2,1 alebo 2,23 alebo 2,2346 alebo 2,007 atď. pretože všetko sú to reálne čísla väčšie ako 2 a zároveň menšie ako 7. Správne uvažujete, že vymenovaním prvkov sa nám množinu **B** nepodarí zapísať. Vždy by sme našli ďalšie a ďalšie čísla, ktoré by neboli zapísané.

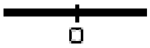
A riešenie?
Množina **B** patrí medzi tie množiny reálnych čísel, ktoré je možné zobraziť na číselnej osi ***úsečkou***, ***polpriamkou*** alebo ***priamkou***, pričom krajné body tejto úsečky alebo začiatočný bod polpriamky môžu, ale nemusia patriť k týmto množinám. ***Takéto podmnožiny množiny R nazývame intervaly***
.

Ohraničené intervaly sú intervaly, ktoré je možné na číselnej osi ***zobraziť pomocou úsečky***. Podľa toho, či tejto úsečke patria 2, 1 alebo žiadny z krajných bodov rozlišujeme intervaly: ***ohraničené***, ***uzavreté***, ***polouzavreté*** a ***otvorené*** .

Interval	**Množina**	**Znázornenie na číselnej osi**	**Zápis**
uzavretý	{x∈R; a≤x≤b}		<a, b>
(zľava uzavretý, sprava otvorený)	{x∈R; a≤x<b}		<a, b)
polouzavretý (zľava otvorený, sprava uzavretý)	{x∈R; a<x≤b}		(a, b>
otvorený	{x∈R; a<x<b}		(a, b)

A teraz môžeme zapísať množinu **B** z príkladu 1 ako interval **(2; 7)**.

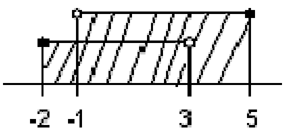
Pri zápise **neohraničených intervalov** používame znak + ∞ alebo – ∞.

Interval	**Množina**	**Znázornenie na číselnej osi**	**Zápis**
sprava neohraničený	{x∈R; x≥a}		<a, ∞)
	{x∈R; x>a}		(a, ∞)
zľava neohraničený	{x∈R; x≤a}		(-∞, a>
	{x∈R; x<a}		(-∞, a)
obojstranne neohraničený R			(-∞, ∞)

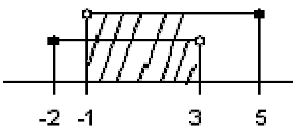
Keďže intervaly sú množiny, tak môžeme určovať zjednotenie, prienik, rozdiel intervalov i doplnok intervalu vzhľadom na množinu R.

Príklad 2:
Dané sú intervaly **A = <–2, 3)**, **B = (–1, 5>**, **C = (3, ∞)**. Určte
a) **A∪B**
a) **A∩B**
c) **C – B**
d) $\mathbf{B'_R}$

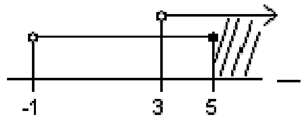
Riešenie:

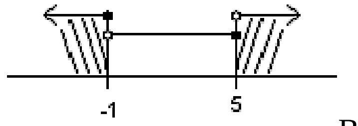
a) 

A ∪B = <-2; 5>

b) 

A∩B = (-1; 3)

c)  C - B = (5; ∞)

d)  B'_R = (-∞; -1> ∪ (5; ∞)

Úlohy:

1/ Dané množiny zapíšte ako intervaly:

$A = \{x \in R; -1{,}5 < x \le 6\}$, $B = \{x \in R; |x| \le 3\}$, $C = \{x \in R; 0{,}5 \le x \le 1{,}5\}$,

$D = \{x \in R; x < 4\}$, $E = \{x \in R; x > -2\}$, $F = \{x \in R; |x| \ge 2\}$, $G = \{x \in R;\ x \le 0\}$

2/ Dané sú intervaly:

$A = (-\infty; 2\rangle$, $B = (0; \infty)$, $C = \langle -4; 2)$. *Zistite* :

$A \cap C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$, $B \cup C$,

$(A \cup B) \cap C$, $(A \cap C) \cup (A \cap B)$, $A - C$, $B - C$,

Úlohy – súhrn:

1) Určte množinu všetkých päťciferných prirodzených čísel, ktorých ciferný súčet je 3.

2) Určte vzťahy medzi množinami *A*, *B*, *C*, *D*. Množiny a vzťahy medzi nimi znázornite pomocou Vennovych diagramov.

A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {2, 4, 6}, C = {2, 5}, D = {6, 2, 4}

3) Daná je množina *M* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Zapíšte nasledujúce podmnožiny množiny *M*:

a) podmnožinu *T* všetkých násobkov 3,

b) podmnožinu *H* všetkých násobkov 10,

c) podmnožinu *D* všetkých násobkov dvojciferných čísel,

d) podmnožinu *J* všetkých čísel, ktorých zápis začína číslicou 1

Množinu *M* i jej podmnožiny *T*, *H*, *D*, *J* znázornite graficky.

4) Overte pomocou Vennovych diagramov, že pre ľubovoľné podmnožiny A, B danej základnej množiny platí:

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

5) Určte vymenovaním dvojice všetkých podmnožín X, Y, ktoré spĺňajú jednotlivé trojice podmienok:

a) $X \subset \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$, $Y \subset \{2, 3, 4, 5, 8\}$, $X \cap Y = \{5\}$

b) $X \cup Y = \{3, 5, 6, 8\}$, $X \cap \{4, 6, 8\} = \emptyset$, $Y \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{3, 5\}$

c) $X \cap Y = \emptyset$, $X' \cap Y = \{3, 5, 7\}$, $X \cap Y' = \{2, 4, 6, 8\}$

d) $X \cap Y = \{2, 6, 7\}$, $X \subset \{5\}'$, $Y \subset \{1, 3, 4, 6, 7\}$

6) V triede je 38 žiakov, 16 z nich pretekalo v behu, 20 v plávaní. Žiadneho z týchto pretekov sa nezúčastnilo 10 žiakov. Koľko žiakov behalo aj plávalo?

7) Všetky uvedené rovnosti s výnimkou jednej platia pre ľubovoľné neprázdne množiny K, L, M.

Ktorá z uvedených rovností neplatí?

A: $K \cup \emptyset = K$

B: $K \cap (L \cap M) = (K \cap L) \cap M$

C: $(K \cup L) \cap L = L$

D: $K \cup (L \cap \emptyset) = K \cup L$

E: $(K \cup L) \cup M = L \cup (M \cup K)$

8) Dané sú množiny: $A = \{x \in Z;\ x^2 < 10\}$,

$B = \{x \in N;\ 3 \mid x \ \wedge\ x < 17\}$,

$C = \{x \in Z;\ x^2 = 1 \vee 2.|x| < 5\}$.

Vymenovaním prvkov určte množiny A, B, C, $A \cap B$, $B \cup C$, C_A'.

9) A, B sú dve podmnožiny množiny M, pričom A je nekonečná množina a B je konečná množina. Ktorý z nasledujúcich výrokov je potom nepravdivý?

A: $A \cup B$ je nekonečná množina

B: $A \cap B$ je konečná množina

C: $A \cap M = M$

D: $A \cup M = M$

E: $A \cap B_M{}'$ je nekonečná množina

10) Čo najjednoduchšie zapíšte množiny:

a) $(2, 6) \cap <4, \infty>$

b) $(2, 6) \cap (10, \infty)$

c) $(2, 6) \cup <4, \infty)$

d) $(-\infty, 3) \cup (0, \infty)$

e) $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$

f) doplnok intervalu $(-\infty, 3>$ v množine R

g) zjednotenie doplnku intervalu $(5, \infty)$ v množine R s intervalom $<0, 10>$

h) prienik doplnku intervalu $<1, 5>$ v množine R s intervalom $<2, 10>$

i) prienik zjednotenia intervalov $(-\infty, 3)$, $<0, 5>$ v množine R.

11) Pomocou intervalov zapíšte množinu:

a) $A = \{x \in R;\ x \leq 2\}$,

b) $B = \{x \in R;\ 3x \geq 8 \wedge 5x < 29\}$,

c) $C = \{x \in R;\ |x - 2| < 3\}$,

d) $D = \{x \in R;\ |x - 1| \geq 4\}$.

12) Charakteristickou vlastnosťou zapíšte množinu:

a) $A = (-\infty, 5\rangle$,

b) $B = (-2, 7\rangle$,

c) $C = (-\infty, -1\rangle \cup (3, +\infty)$,

d) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

13) Dané sú množiny $A = \langle -2, 7\rangle$, $B = (0, 10\rangle$, $C = \{x \in R;\ x > 2\}$.

Pomocou intervalov zapíšte množiny: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $B \cup C$, $A_R{}'$, $C_R{}'$.